Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 24/6/2011)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Siano date 3 urne U_0, U_1, U_2, con U_0 contenente 3 palline nere, U_1 contenente 1 pallina bianca e 2 nere, U_2 contenente 3 palline bianche. Scelta a caso una delle 3 urne, da essa si effettuano estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, ...$, ed H_r = *"le estrazioni sono effettuate dall'urna U_r"*, $r = 0, 1, 2$, calcolare: (i) $P(E_6|E_2)$; (ii) $P(H_1|E_1 \cdots E_9)$.

   $P(E_6|E_2) =$ $\qquad\qquad$ $P(H_1|E_1 \cdots E_9) =$

2. Dati due numeri aleatori X, Y, con coefficiente di correlazione $\rho = \frac{2}{3}$ e con distribuzione esponenziale di parametri $\lambda = 2$, calcolare la previsione μ del numero aleatorio XY e la varianza σ^2 del numero aleatorio $\frac{X-Y}{2}$.

   $\mu =$ $\qquad\qquad$ $\sigma^2 =$

3. Da un'urna, contenente 5 palline numerate da 1 a 5, Tizio e Caio effettuano ognuno 3 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi A = *"Tizio ottiene sempre risultato pari, oppure sempre dispari "*, B = *"Caio ottiene sempre un risultato minore di 3, oppure sempre maggiore o uguale a 3"*, C = *"si verifica uno e uno solo degli eventi A, B"*, calcolare la probabilità condizionata $P[C|(A \vee B)]$.

   $P[C|(A \vee B)] =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y), appartenente al triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (0, 2), (1, 2)$, è $f(x, y) = 2xy$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la previsione di X e i valori di a, con $a \geq 2$, tali che $P(Y > aX) \geq P(Y \leq aX)$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad$ $a \in$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F_2(y)$ e la funzione di rischio $h_2(y)$ di Y nell'intervallo $(0, 2)$.

   $F_2(y) =$ $\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

6. Tizio lancia 5 volte una moneta che si suppone "non difettosa". Definiti gli eventi A = *"esce Testa al massimo 1 volta"*, B = *"esce Testa almeno 4 volte"*, calcolare le probabilità degli eventi condizionati $A|(A \vee B)$ e $B|(A \vee B)$.
   (*si indichi con X il numero aleatorio di volte in cui esce Testa*).

   $P[A|(A \vee B)] =$ $\qquad\qquad$ $P[B|(A \vee B)] =$

7. Dati 2 numeri aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$.
   (*ricordiamo che la funzione caratteristica di una distribuzione normale standard è* $e^{-\frac{t^2}{2}}$).

   $\varphi_Z(t) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 24/6/2011.

1. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono scambiabili; pertanto $P(E_i) = P(E_1)$, $\forall i$, $P(E_iE_j) = P(E_1E_2)$, $\forall i \neq j$, con $P(H_r) = \frac{1}{3}$; inoltre

$$P(E_1) = \sum_r P(H_r)P(E_1|H_r) = \frac{1}{3}(0 + \frac{1}{3} + 1) = \frac{4}{9}\,,$$

$$P(E_1E_2) = \sum_r P(H_r)P(E_1E_2|H_r) = \sum_r P(H_r)P(E_1|H_r)P(E_2|H_r) = \frac{1}{3}(0 + \frac{1}{9} + 1) = \frac{10}{27}\,.$$

Allora

$$P(E_6|E_2) = \frac{P(E_2E_6)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{10}{27}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{6}\,;$$

$$P(H_1|E_1\cdots E_9) = \frac{P(H_1)P(E_1\cdots E_9|H_1)}{\sum_r P(H_r)P(E_1\cdots E_9|H_r)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^9}}{\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^9} + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1}{3^9+1} = \frac{1}{19683}\,.$$

Nota: $P(H_0|E_1\cdots E_9) = 0\,;\ P(H_2|E_1\cdots E_9) = \frac{3^9}{3^9+1} = \frac{19683}{19684}$.

2. Essendo $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$, con $\sigma_X = \sigma_Y = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y)$, segue

$$Cov(X,Y) = \rho\,\sigma_X\sigma_Y = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(XY) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,;$$

pertanto: $\mathbb{P}(XY) = \frac{5}{12}$. Inoltre

$$\sigma^2 = Var(\frac{X-Y}{2}) = \frac{1}{4}Var(X-Y) = \frac{Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)}{4} = \frac{1}{24}\,.$$

3. Si ha: $P(A) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{7}{25}\,,\ \ P(B) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{7}{25} = P(A)$; inoltre, A e B sono stocasticamente indipendenti, con

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{7}{25} + \frac{7}{25} - \frac{7}{25}\cdot\frac{7}{25} = \frac{301}{625}\,;$$

$$P(C) = P(AB^c \vee A^cB) = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = \frac{7}{25}\cdot\frac{18}{25} + \frac{18}{25}\cdot\frac{7}{25} = \frac{252}{625}\,;$$

allora, osservando che $(A \vee B) \wedge C = (A \vee B) \wedge (AB^c \vee A^cB) = AB^c \vee A^cB = C$, segue

$$P[C|(A \vee B)] = \frac{P[C \wedge (A \vee B)]}{P(A \vee B)} = \frac{P(C)}{P(A \vee B)} = \frac{252}{301} = \frac{36}{43}\,.$$

4. Si ha
$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{2x}^{2} 2xydy=\cdots=4x-4x^3\,,\ 0\le x\le 1\,,$$
con $f_1(x)=0$ altrove. Quindi
$$\mathbb{P}(X)=\int_0^1 xf_1(x)dx=\int_0^1 4(x^2-x^4)dx=\cdots=\frac{8}{15}\,.$$
Inoltre, per ogni $a\ge 2$, risulta
$$P(Y>aX)=\int_0^2 dy\int_0^{\frac{y}{a}} 2xydx=\int_0^2 \frac{y^3}{a^2}dy=\cdots=\frac{4}{a^2}\,,\quad P(Y\le aX)=1-\frac{4}{a^2}\,;$$
pertanto
$$P(Y>aX)\ge P(Y\le aX)\iff \frac{4}{a^2}\ \ge\ 1-\frac{4}{a^2}\iff 2\le a\le 2\sqrt{2}\,.$$

5. Si ha
$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^{\frac{y}{2}} 2xydx=\cdots=\frac{y^3}{4}\,,\ 0\le y\le 2\,,$$
con $f_2(y)=0$ altrove. Quindi, fissato $y\in(0,2)$, si ha
$$F_2(y)=P(Y\le y)=\int_{-\infty}^{y} f_2(t)dt=\int_0^y \frac{t^3}{4}dt=\frac{y^4}{16}\,,$$
da cui segue, per $y\in(0,2)$,
$$S_2(y)=1-F_2(y)=1-\frac{y^4}{16}\,;\quad h_2(y)=\frac{f_2(y)}{S_2(y)}=\frac{\frac{y^3}{4}}{1-\frac{y^4}{16}}=\frac{4y^3}{16-y^4}\,.$$

6. Si ha $X\sim B(5,\frac{1}{2})$; inoltre $A=(X\le 1),\ B=(X\ge 4),\ AB=\emptyset$, con
$$P(X=h)=\binom{5}{h}\frac{1}{2^5}\,,\ \ h=0,1,\ldots,5\,,$$
e con
$$P(AB)=0\,;\ \ P(A)=P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{5}{0}\frac{1}{2^5}+\binom{5}{1}\frac{1}{2^5}=\frac{3}{16}\,;$$
$$P(B)=P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\frac{1}{2^5}+\binom{5}{5}\frac{1}{2^5}=\frac{3}{16}=P(A)\,.$$
Pertanto, osservando che $A\wedge(A\vee B)=A$, $B\wedge(A\vee B)=B$, segue
$$P[A|(A\vee B)]=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}=\frac{1}{2}=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)}=P[B|(A\vee B)]\,.$$

7. Si ha
$$\varphi_Z(t)=\mathbb{P}(e^{itZ})=\mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{X-Y}{\sqrt{2}}})=\mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{X}{\sqrt{2}}}e^{it\cdot\frac{-Y}{\sqrt{2}}})=\mathbb{P}(e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}X})\mathbb{P}(e^{i\frac{-t}{\sqrt{2}}Y})=$$
$$=\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\varphi_Y\left(\frac{-t}{\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{t^2}{4}}e^{-\frac{t^2}{4}}=e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$
(*Nota: anche Z ha una distribuzione normale standard, come risulta direttamente osservando che: (i) dalla convoluzione di due distribuzioni normali si ottiene una distribuzione normale; (ii) $\mathbb{P}(Z)=0, Var(Z)=1$.*)