Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 9/9/2011)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un lotto L di componenti elettronici, contenente 4 pezzi buoni e 1 difettoso, si estraggono a caso 3 pezzi senza restituzione. Definiti gli eventi E_i = "l'i-mo pezzo estratto è difettoso", $i = 1, 2, 3$, calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(E_1 \vee E_2 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3)$. Posto inoltre $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$ e indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X, calcolare la probabilità $p = P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la covarianza dei numeri aleatori $U = |E_1| + |E_2|\,,\; V = |E_2| + |E_3|$.

   $Cov(U, V) =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = k(x + y)$, per $(x, y) \in Q = [1, 3] \times [1, 3]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la mediana M del numero aleatorio X; inoltre, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $M =$ $\qquad\qquad$ *stoc. indip.?*

4. Il ricavato di due attività economiche è costituito da un vettore aleatorio (X, Y), con densità congiunta $f(x, y) = \frac{1}{6\pi} e^{-\frac{(x-4)^2}{2} - \frac{(y-4)^2}{18}}$. Calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(2 \leq X \leq 6, 1 \leq Y \leq 7) \,|\, (X \leq 6, Y \leq 7)$ e lo scarto standard σ_Z del guadagno aleatorio totale $Z = X + Y$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma_Z =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio Z. (*ricordiamo che per una distribuzione normale standard si ha $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ e che un numero aleatorio X con distribuzione normale di parametri m, σ si può rappresentare come $X = \sigma X_{0,1} + m$, dove $X_{0,1}$ ha una distribuzione normale standard*)

   $\varphi_Z(t) =$

6. Dato un numero aleatorio X, con distribuzione esponenziale di parametro λ ed una costante positiva a, sia $Y = aX$. Fissati due valori reali $y > 0, y_0 > 0$, calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(Y > y + y_0 \,|\, Y > y_0)$ e la funzione di rischio $h(y)$ di Y.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h(y) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri m_0, σ_0. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_0$. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_n)$ e con m_n e σ_n la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$, calcolare la probabilità $p = P[(m_n - \sigma_n \leq \Theta \leq m_n + \sigma_n)|\mathbf{x}]$ e stabilire per quale intero n l'ampiezza dell'intervallo $[m_n - \sigma_n, m_n + \sigma_n]$ è $\frac{1}{10}$ di quella dell'intervallo $[m_0 - \sigma_0, m_0 + \sigma_0]$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $n =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 9/9/2011.

1. Si ha $P(E_i) = \frac{1}{5}, i = 1, 2, 3$, con $E_iE_j = \emptyset, i \neq j$; allora

$$\alpha = \frac{P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_1 \vee E_2 \vee E_3)]}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{P(E_1 \vee E_2)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{P(E_1) + P(E_2)}{P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)} = \frac{2}{3}.$$

Inoltre $X \in \{0, 1\}$, con $P(X = 0) = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$, $P(X = 1) = \frac{3}{5}$; pertanto

$$\mathbb{P}(X) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = 0^2 \cdot \frac{2}{5} + 1^2 \cdot \frac{3}{5} = \mathbb{P}(X^2), \quad \sigma = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

da cui segue: $0 < m - \sigma = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5} < 1$, $m + \sigma = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5} > 1$.
Allora l'evento $(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$ coincide con l'evento $(X = 1)$; quindi

$$p = P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = P(X = 1) = \frac{3}{5}.$$

2. Osserviamo che $Cov(|A|, |A|) = Var(|A|)$, $Cov(|A|, |B|) = P(AB) - P(A)P(B)$; inoltre $P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = 0$, con $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{5}$. Allora

$$Cov(|E_1|+|E_2|, |E_2|+|E_3|) = Cov(|E_1|, |E_2|)+Cov(|E_1|, |E_3|)+Cov(|E_2|, |E_2|)+Cov(|E_2|, |E_3|) =$$

$$= -P(E_1)P(E_2) - P(E_1)P(E_3) + Var(|E_2|) - P(E_2)P(E_3) = -\frac{1}{25} - \frac{1}{25} + \frac{4}{25} - \frac{1}{25} = \frac{1}{25}.$$

In alternativa: osservando che $|E_i||E_j| = |E_iE_j| = 0$, $i \neq j$, $|E_i||E_i| = |E_i|$, segue

$$UV = (|E_1| + |E_2|)(|E_2| + |E_3|) = |E_1||E_2| + |E_1||E_3| + |E_2||E_2| + |E_2||E_3| = |E_2|;$$

pertanto

$$Cov(U, V) = \mathbb{P}(UV)-\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V) = P(E_2)-[P(E_1)+P(E_2)][P(E_2)+P(E_3)] = \frac{1}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{25}.$$

3. Si ha

$$k \int_1^3 dx \int_1^3 (x + y)dy = \cdots = k \int_1^3 (2x + 4)dx = \cdots = 16k = 1;$$

pertanto: $k = \frac{1}{16}$. Inoltre

$$f_1(x) = \frac{1}{16} \int_1^3 (x + y)dy = \cdots = \frac{x + 2}{8}, \ 1 \leq x \leq 3,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora

$$\int_1^M \frac{x + 2}{8} dx = \cdots = \frac{M^2 + 4M - 5}{16} = \frac{1}{2}, \quad 1 < M < 3;$$

ovvero: $M^2 + 4M - 13 = 0$, $1 < M < 3$, da cui segue: $M = \sqrt{17} - 2 \simeq 2.123$. Infine

$$f_2(y) = \frac{1}{16} \int_1^3 (x + y)dx = \cdots = \frac{y + 2}{8}, \ 1 \leq y \leq 3,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Osservando che $f(x, y) \neq f_1(x)f_2(y)$, segue che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-4)^2}{18}}$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Pertanto $X \sim N_{4,1}(x), Y \sim N_{4,3}(y)$, con X, Y stocasticamente indipendenti; allora, osservando che $\Phi(1) \simeq 0.8413$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$p = P[(2 \le X \le 6, 1 \le Y \le 7) \,|\, (X \le 6, Y \le 7)] = \frac{P[(2 \le X \le 6, 1 \le Y \le 7) \wedge (X \le 6, Y \le 7)]}{P(X \le 6, Y \le 7)} =$$

$$= \frac{P(2 \le X \le 6, 1 \le Y \le 7)}{P(X \le 6, Y \le 7)} = \frac{P(2 \le X \le 6)P(1 \le Y \le 7)}{P(X \le 6)P(Y \le 7)} =$$

$$= \frac{[\Phi_{4,1}(6) - \Phi_{4,1}(2)][\Phi_{4,3}(7) - \Phi_{4,3}(1)]}{\Phi_{4,1}(6) \cdot \Phi_{4,3}(7)} = \frac{[\Phi(2) - \Phi(-2)][\Phi(1) - \Phi(-1)]}{\Phi(2) \cdot \Phi(1)} =$$

$$= \frac{[2\Phi(2) - 1][2\Phi(1) - 1]}{\Phi(2) \cdot \Phi(1)} \simeq \frac{(2 \times 0.9772 - 1)(2 \times 0.8413 - 1)}{0.9772 \times 0.8413} \simeq 0.7925\,.$$

Inoltre: $\sigma_Z = \sqrt{Var(X) + Var(Y)} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

5. Si ha: $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$, con $X = X_{0,1} + 4$, $Y = 3Y_{0,1} + 4$; pertanto

$$\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \mathbb{P}(e^{it(X_{0,1}+4)}) = e^{4it}\mathbb{P}(e^{itX_{0,1}}) = e^{4it}e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{4it-\frac{t^2}{2}}\;;$$

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{P}(e^{itY}) = \mathbb{P}(e^{it(3Y_{0,1}+4)}) = e^{4it}\mathbb{P}(e^{i(3t)Y_{0,1}}) = e^{4it}e^{-\frac{9t^2}{2}} = e^{4it-\frac{9t^2}{2}}\;;$$

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{4it-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{4it-\frac{9t^2}{2}} = e^{8it-\frac{10t^2}{2}}\,.$$

(*Nota:* $Z \sim N_{8,\sqrt{10}}$)

6. Ricordando la proprietà di assenza di memoria della distribuzione esponenziale, si ha

$$\alpha = P(Y > y + y_0 \,|\, Y > y_0) = P(X > \frac{y}{a} + \frac{y_0}{a} \,|\, X > \frac{y_0}{a}) = P(X > \frac{y}{a}) =$$

$$= \int_{\frac{y}{a}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \;=\; e^{-\frac{\lambda}{a}\,y} \;=\; P(aX > y) \;=\; P(Y > y)\,;$$

pertanto Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_Y = \frac{\lambda}{a}$ e quindi $h(y) = \frac{\lambda}{a}$, per $y > 0$.

7. Si ha: $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}$, $\frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = \frac{1+9n}{\sigma_0^2}$. Allora

$$p = P[(m_n - \sigma_n \le \Theta \le m_n + \sigma_n)|\mathbf{x}] = \Phi_{m_n,\sigma_n}(m_n + \sigma_n) - \Phi_{m_n,\sigma_n}(m_n - \sigma_n) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.6826\,;$$

inoltre il rapporto delle ampiezze degli intervalli $[m_n - \sigma_n, m_n + \sigma_n]$ ed $[m_0 - \sigma_0, m_0 + \sigma_0]$ è $\frac{2\sigma_n}{2\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{1+9n}} = \frac{1}{10}$ per $n = 11$.

Nota: $P[(m_n - \sigma_n \le \Theta \le m_n + \sigma_n) \,|\, \mathbf{x}] = P(m_0 - \sigma_0 \le \Theta \le m_0 + \sigma_0) \simeq 0.6826$.