Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 24/2/2012)

(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Un oggetto percorre uno spazio di 24 metri partendo da fermo, con un'accelerazione aleatoria costante (in m/sec^2) pari ad A. Supposto che la distribuzione di probabilità di A sia uniforme nell'intervallo $(0, 3]$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(T > t \,|\, T > \tau)$, con $t > \tau > 4$, dove T è il tempo aleatorio impiegato per effettuare il percorso. Calcolare inoltre la previsione μ di T.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mu =$

2. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere vengono estratte a caso tutte le palline. Tizio vince un premio se le prime due palline sono bianche (evento A), Caio vince un premio se le ultime due palline sono bianche (evento B). Posto $E_i =$ *"l'i-ma pallina è bianca"*, $i = 1, ..., 5$, calcolare: (i) la probabilità p che Tizio oppure Caio vinca il premio (evento E); (ii) la probabilità α che la terza pallina sia bianca supposto vero l'evento E.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = 3|A| + |B| - 2|E|$.

$$F(x) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases}$$

4. Un oggetto si muove da A a B, impiegando un tempo aleatorio X, e poi da B a C impiegando un tempo aleatorio Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = e^{-x-y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Posto $Z = X + Y$, calcolare: (i) la previsione μ di Z; (ii) lo scarto quadratico medio σ di Z; (iii) $P(Z \leq z)$, con $z > 0$.

   $\mu =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(Z \leq z) =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di rischio $h(z)$ di Z e la probabilità condizionata $p = P(Z > z + \delta \,|\, Z > z)$, con $z > 0$, $\delta > 0$.

   $h(z) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

6. Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori X e Y stocasticamente indipendenti sono $\varphi_X(t) = e^{it-t^2}$, $\varphi_Y(t) = e^{2it-3t^2}$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio di Z; inoltre, calcolare la probabilità p dell'evento $(m - \sigma \leq Z \leq m + \sigma)$.

   $m =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

7. Un operatore prende a caso un lotto da un insieme di 4 lotti, uno dei quali contiene 2 pezzi difettosi e 1 buono, mentre gli altri 3 lotti contengono 1 pezzo difettoso e 2 buoni. Successivamente, l'operatore esamina a caso tutti i pezzi del lotto. Definiti gli eventi $H =$ *"il lotto utilizzato dall'operatore contiene 2 pezzi difettosi e 1 buono"*, $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare: (i) $P(H|E_1 E_2^c)$; (ii) $P(E_1|E_3)$.

   $P(H|E_1 E_2^c) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(E_1|E_3) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 24/2/2012.

1. Si ha: $s = 24 = \int_0^T Atdt = \cdots = \frac{1}{2}AT^2$; pertanto: $T^2 = \frac{48}{A}$; ovvero $T = \sqrt{\frac{48}{A}}$, con $T \in [4, +\infty)$. Allora, per $t > \tau > 4$, si ha

$$p = P(T > t \,|\, T > \tau) = \frac{P(T > t, T > \tau)}{P(T > \tau)} = \frac{P(T > t)}{P(T > \tau)},$$

con

$$S(t) = P(T > t) = P(T^2 > t^2) = P\left(A < \frac{48}{t^2}\right) = \int_0^{\frac{48}{t^2}} f_A(a)\,da = \int_0^{\frac{48}{t^2}} \frac{1}{3}\,da = \frac{16}{t^2},$$

e con $P(T > \tau) = \frac{16}{\tau^2}$, da cui segue: $p = \frac{\tau^2}{t^2}$. Inoltre: $f_T(t) = -S'(t) = \frac{32}{t^3}$ per $t > 4$, con $f_T(t) = 0$ altrove; pertanto per il tempo medio di percorrenza (in *sec.*) si ha:

$$\mathbb{P}(T) = \mu = \int_4^{+\infty} t f_T(t)dt = \int_4^{+\infty} \frac{32}{t^2}dt = \left[-\frac{32}{t}\right]_4^{+\infty} = 8 \; sec.$$

In alternativa: $\mu = \int_0^3 \sqrt{\frac{48}{a}} f_A(a)da = \int_0^3 \sqrt{\frac{48}{a}}\,\frac{1}{3}\,da = \cdots = 8 \; sec.$
Nota: in questo esempio, come si può verificare, risulta $\mathbb{P}(T^2) = +\infty$; *pertanto* $\sigma_T = +\infty$.

2. Gli eventi sono scambiabili; quindi: $P(E_i) = P(E_1) = \frac{3}{5}$, $i = 1, ..., 5$; inoltre $P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, per ogni $\{i, j\} \subset \{1, ..., 5\}$. Pertanto $E = A \vee B$, con $AB = \emptyset$ e con $P(A) = P(E_1E_2) = \frac{3}{10} = P(E_4E_5) = P(B)$, da cui segue

$$p = P(E) = P(A \vee B) = P(E_1E_2 \vee E_4E_5) = P(A) + P(B) = \frac{3}{5}.$$

Inoltre: $E_3 \wedge (A \vee B) = E_1E_2E_3 \vee E_3E_4E_5$, con $E_1E_2E_3E_4E_5 = \emptyset$, e con

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_3E_4E_5) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \; P(E_1E_2E_3 \vee E_3E_4E_5) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5};$$

pertanto

$$\alpha = P(E_3 \,|\, A \vee B) = \frac{P[E_3 \wedge (A \vee B)]}{P(A \vee B)} = \frac{P(E_1E_2E_3 \vee E_3E_4E_5)}{P(E_1E_2 \vee E_4E_5)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

3. Osservando che $E = A \vee B$, con $AB = \emptyset$, segue $|E| = |A \vee B| = |A| + |B|$; allora $X = 3|A| + |B| - 2|E| = |A| - |B|$. Si hanno tre costituenti: $AB^c = A$, $A^cB = B$, A^cB^c; i corrispondenti valori per X sono: 1,0,-1, con

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{3}{10} = P(B) = P(X = -1), \quad P(X = 0) = 1 - P(X \neq 0) = \frac{4}{10}.$$

Pertanto: $F(x) = 0$ per $x < -1$, $F(x) = \frac{3}{10}$ per $-1 \leq x < 0$, $F(x) = \frac{7}{10}$ per $0 \leq x < 1$, $F(x) = 1$ per $x \geq 1$.

4. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y} dy = e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}\,,\ x \geq 0\,;\quad f_2(y) = \cdots = e^{-y}\,,\ y \geq 0\,;$$

con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$; quindi

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \frac{1}{\lambda} = 1\,,\ \mu = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 2\,,\ Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 2\,,$$

da cui segue: $\sigma = \sqrt{2}$. Inoltre: $P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-x-y} dy =$

$$= \int_0^z e^{-x}(1 - e^{-z+x}) dx = \int_0^z e^{-x} dx - \int_0^z e^{-z} dx = 1 - e^{-z} - z e^{-z}\,,\ z \geq 0\,.$$

5. Per ogni $z > 0$ si ha: $F(z) = P(Z \leq z) = 1 - e^{-z} - ze^{-z}$, $f(z) = F_Z'(z) = \cdots = ze^{-z}$ *(Z ha una distribuzione Gamma $G_{2,1}$)*. Inoltre: $S(z) = 1 - F(z) = e^{-z} + ze^{-z}$; allora $h(z) = \frac{f(z)}{S(z)} = \frac{ze^{-z}}{e^{-z}+ze^{-z}} = \frac{z}{1+z}$. Infine

$$p = P(Z > z + \delta \,|\, Z > z) = \frac{P(Z > z + \delta, Z > z)}{P(Z > z)} = \frac{P(Z > z + \delta)}{P(Z > z)} =$$

$$= \frac{e^{-z-\delta} + (z+\delta)e^{-z-\delta}}{e^{-z} + ze^{-z}} = \frac{e^{-\delta}(1 + z + \delta)}{1 + z} = e^{-\delta}\left(1 + \frac{\delta}{1+z}\right)\,,$$

con $p \simeq e^{-\delta}$ per $z >> \delta$; *(se la distribuzione di probabilità di Z fosse esponenziale di parametro $\lambda = 1$ si avrebbe: $p = e^{-\delta}$).*

6. Essendo X e Y stocasticamente indipendenti, si ha

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{it-t^2} e^{2it-3t^2} = e^{3it-4t^2}\,;$$

pertanto Z ha una distribuzione normale di parametri $m = 3$, $\sigma = 2\sqrt{2}$. Allora

$$p = \Phi_{3,2\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2}) - \Phi_{3,2\sqrt{2}}(3 - 2\sqrt{2}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.6826\,.$$

Nota: m e σ si possono ricavare anche dalle formule: $m = \mathbb{P}(Z) = \frac{\varphi_Z'(0)}{i} = \cdots = 3$, $m^{(2)} = \mathbb{P}(Z^2) = \frac{\varphi_Z''(0)}{i^2} = -\varphi_Z''(0) = \cdots = 17$, da cui segue: $\sigma = \sqrt{17-9} = 2\sqrt{2}$.

7. Si ha $P(E_1E_2^c|H) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(E_1E_2^c|H^c) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$, $P(H) = \frac{1}{4}$; quindi

$$P(E_1E_2^c) = P(E_1E_2^c|H)P(H) + P(E_1E_2^c|H^c)P(H^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}\,.$$

Allora

$$P(H|E_1E_2^c) = \frac{P(E_1E_2^c|H)P(H)}{P(E_1E_2^c)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} = P(H)\,.$$

Inoltre, gli eventi E_i sono scambiabili, con $P(E_i) = P(E_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$, e con

$$P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{12}\,;$$

quindi

$$P(E_1|E_3) = \frac{P(E_1E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = P(E_2|E_1) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5} < \frac{5}{12} = P(E_1)\,.$$