Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 17/9/2012)

(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{(x+4)^2}{2} - \frac{(y-3)^2}{8}}$. Calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X+Y$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(Z \leq -1+\sqrt{5}) \,|\, (-1-2\sqrt{5} \leq Z \leq -1+2\sqrt{5})$ (*ricordiamo che per una distribuzione normale con parametri* m, σ *si ha* $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$).

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

2. Dati 3 eventi A, B, C stocasticamente indipendenti, con $P(A) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(B) = p$, con $0 < p < 1$, sia $X = |A| + |B|$ e $Y = |B| + |C|$. Calcolare: (i) il valore di p che rende massima la covarianza di X, Y; (ii) il coefficiente di correlazione di X, Y, in funzione di p.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\rho =$

3. Dati due numeri aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione ipergeometrica $H(4, 3, \frac{1}{2})$, sia $U = X+Y, V = aX - Y$. Calcolare la probabilità condizionata $p = P(X+Y > 2 \,|\, X+Y < 4)$ e il valore di a tale che U, V sono incorrelati.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $a =$

4. Un autoveicolo percorre in andata e ritorno un tratto di strada, impiegando un tempo aleatorio (in ore) $X+1$ in andata e $Y+2$ nel ritorno. La densità congiunta del vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = kxy$, per $(x,y) \in Q = [0,1] \times [0,1]$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k; inoltre, indicando con Z il tempo aleatorio totale di percorrenza, calcolare la previsione m di Z e la probabilità p dell'evento $(Z > 4)$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $m =$ $\qquad\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti e calcolare il valore x_0 tale che $P(X > x_0) = 2P(X \leq x_0)$.

   Indipendenza ? $\qquad\qquad$ $x_0 =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X,Y) è $f(x,y) = ke^{-x-y}$ per $x \geq 0, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la funzione di rischio $h_Y(y)$ per $y > 0$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $h_Y(y) =$

7. Da un lotto, contenente 4 pezzi buoni e 2 difettosi, si effettuano 6 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ "l'i-mo pezzo estratto è difettoso", $i = 1, \ldots, 6$, calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(E_1 E_3 \,|\, E_3 \vee E_6)$. Posto inoltre $X = |E_1| + |E_3| + |E_5|$ e indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X, calcolare la probabilità $p = P(m - 2\sigma < X < m + \sigma)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 17/9/2012.

1. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x+4)^2}{2}}\,,\ f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-3)^2}{8}}\,,$$

con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Pertanto $X \sim N_{-4,1}(x), Y \sim N_{3,2}(y)$, con X, Y stocasticamente indipendenti, con $\varphi_X(t) = e^{-4it-\frac{t^2}{2}}$, $\varphi_Y(t) = e^{3it-2t^2}$, e con

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{-it-\frac{5t^2}{2}}\,.$$

Quindi Z ha una distribuzione normale con parametri $m = -1, \sigma = \sqrt{5}$. Allora, osservando che $\Phi(1) \simeq 0.8413\,,\ \Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$p = P[(Z \le -1+\sqrt{5})\,|\,(-1-2\sqrt{5} \le Z \le -1+2\sqrt{5})] = \frac{P(-1-2\sqrt{5} \le Z \le -1+\sqrt{5})}{P(-1-2\sqrt{5} \le Z \le -1+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\Phi_{-1,\sqrt{5}}(-1+\sqrt{5}) - \Phi_{-1,\sqrt{5}}(-1-2\sqrt{5})}{\Phi_{-1,\sqrt{5}}(-1+2\sqrt{5}) - \Phi_{-1,\sqrt{5}}(-1-2\sqrt{5})} = \frac{\Phi(1)-1+\Phi(2)}{\Phi(2)-1+\Phi(2)} \simeq \frac{0.8413-1+0.9772}{2\times 0.9772-1} \simeq 0.8576\,.$$

2. Si ha $Cov(X,Y) = Cov(|A|+|B|, |B|+|C|) =$

$$= Cov(|A|,|B|) + Cov(|A|,|C|) + Cov(|B|,|B|) + Cov(|B|,|C|) = Var(|B|) = p(1-p) \le \frac{1}{4}\,,$$

con $Cov(X,Y) = \frac{1}{4}$ per $p = \frac{1}{2}$. Inoltre $Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{4} + p(1-p)$; pertanto $\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{p(1-p)}{\frac{1}{4}+p(1-p)}$.
(*Nota: la funzione $t = p(1-p)$ cresce da 0 a $\frac{1}{4}$ al variare di p da 0 a $\frac{1}{2}$, mentre decresce da $\frac{1}{4}$ a 0 al variare di p da $\frac{1}{2}$ a 1; inoltre, $\rho = \frac{t}{\frac{1}{4}+t}$ è una funzione crescente di t; pertanto, come funzione di p, il coefficiente di correlazione ρ assume il massimo $\frac{1}{2}$ in $p = \frac{1}{2}$*)

3. Si ha $X \in \{1,2\}, Y \in \{1,2\}, X+Y \in \{2,3,4\}$, con

$$P(X=1) = P(Y=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2} = P(Y=2) = P(X=2)\,;$$

$$P(X+Y=2) = P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = \frac{1}{4} = \cdots = P(X+Y=4)\,;$$

$$P(X+Y=3) = P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Allora

$$p = \frac{P(X+Y>2, X+Y<4)}{P(X+Y<4)} = \frac{P(X+Y=3)}{P(X+Y=2)+P(X+Y=3)} =$$

$$= \frac{P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)}{P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)} = \frac{2}{3}\,.$$

Inoltre, osservando che $Var(X) = Var(Y)$, $Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = 0$, segue

$$Cov(U,V) = Cov(X+Y, aX-Y) = aCov(X,X) - Cov(X,Y) + aCov(Y,X) - Cov(Y,Y) =$$

$$= aVar(X) - Var(Y) = (a-1)Var(X) = 0\,, \text{ per } a = 1\,.$$

4. Si ha: $\int_0^1\int_0^1 kxydxdy = \cdots = \frac{k}{4} = 1$; pertanto: $k = 4$. Inoltre $m = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X+Y+3) = \mathbb{P}(X+Y)+3$, con $\mathbb{P}(X+Y) = \int_0^1\int_0^1 (x+y)4xydxdy = \cdots = 4\int_0^1 (\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3})dx = \cdots = \frac{4}{3}$. Pertanto: $m = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$. Infine $p = P(Z > 4) = 1 - P(Z \leq 4) = 1 - P(X+Y \leq 1) =$

$$= 1 - 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} xydy = \cdots = 1 - 2\int_0^1 x(1+x^2-2x)dx = \cdots = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

5. Si ha $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 4xydy = 2x\,,\ f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 4xydx = 2y$, per $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove. Quindi $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y); ovvero, X e Y sono stocasticamente indipendenti. Inoltre

$$P(X > x_0) = 2P(X \leq x_0) \iff P(X \leq x_0) = \int_0^{x_0} 2xdx = x_0^2 = \frac{1}{3}\,,\ x_0 \in (0,1)\,,$$

da cui segue: $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Si ha $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy = k\int_0^{+\infty} e^{-x}dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} e^{-y}dy = k\int_0^{+\infty} e^{-x}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-2x})dx = = k\int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}x}dx - k\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = k\cdot\frac{2}{3} - k\cdot\frac{1}{3} = \frac{k}{3} = 1$; pertanto: $k = 3$. Inoltre, fissato $y > 0$, si ha

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(Y > y, X \geq 0) = \int_y^{+\infty} du \int_{\frac{u}{2}}^{2u} f(x,u)dx = 3\int_y^{+\infty} e^{-u}du \int_{\frac{u}{2}}^{2u} e^{-x}dx =$$

$$= 3\int_y^{+\infty} e^{-u}(e^{-\frac{u}{2}} - e^{-2u})du = 2\int_y^{+\infty} \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}u}du - \int_y^{+\infty} 3e^{-3u}du = 2e^{-\frac{3}{2}y} - e^{-3y}\,.$$

Allora: $h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{S_Y(y)} = -\frac{S'_Y(y)}{S_Y(y)} = \frac{3e^{-\frac{3}{2}y} - 3e^{-3y}}{2e^{-\frac{3}{2}y} - e^{-3y}} = \frac{3 - 3e^{-\frac{3}{2}y}}{2 - e^{-\frac{3}{2}y}} \quad \longrightarrow_{y\to+\infty} \quad \frac{3}{2}$.

7. Gli eventi $E_1,\ldots,E_6$ sono scambiabili; in particolare sono equiprobabili, con

$$P(E_i) = P(E_1) = \frac{1}{3}\,,\ P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = \frac{1}{15}\,,\ E_iE_jE_k = \emptyset\,;$$

inoltre $P(E_3^cE_6^c) = P(E_1^cE_2^c) = \frac{2}{5}$. Allora

$$\alpha = \frac{P[(E_1E_3)\wedge(E_3\vee E_6)]}{P(E_3\vee E_6)} = \frac{P(E_1E_3)}{1 - P(E_3^cE_6^c)} = \frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{9}\,.$$

Inoltre $X \in \{0,1,2\}$, con $X \sim H(6,3,\frac{1}{3})$; quindi $\mathbb{P}(X) = np = 1\,,\ \sigma = \sqrt{npq(1-\frac{n-1}{N-1})} = \sqrt{\frac{2}{5}} \simeq 0.6325$, da cui segue: $m - 2\sigma = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{5}} < 0\,,\quad m + \sigma = 1 + \sqrt{\frac{2}{5}} \in (1,2)$. Allora l'evento $(m - 2\sigma \leq X \leq m + \sigma)$ coincide con l'evento $(X < 2)$; quindi

$$p = P(m - 2\sigma < X < m + \sigma) = P(X=0) + P(X=1) = 1 - P(X=2) = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{5}\,.$$