Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 19/11/2012)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Sia Z il risultato aleatorio di un'estrazione a caso da un'urna contenente 8 palline numerate da 1 a 8, con $P(Z = k) = \frac{1}{8}, k = 1, \ldots, 8$. Definiti gli eventi $A = (Z \in \{1, 2, 3\})$, $B = (Z \in \{1, 2, 7, 8\})$, $C = (Z \in \{6, 7, 8\})$, determinare i costituenti relativi ad A, B, C e calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ di $X = 2|A| - 3|B| + 2|C|$.

   costituenti : $m =$ $\sigma =$

2. La densità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, 3]$ è $f(x) = a$ per $x \in [0, 1] \cup [2, 3]$, $f(x) = 2a$ per $x \in (1, 2)$. Calcolare la costante a, la mediana M e la funzione di ripartizione.

   $a =$ $M =$ $F(x) =$

3. Un'urna di composizione incognita contiene 6 palline; le ipotesi possibili sono: $H_0 =$ *"l'urna contiene 6 palline nere"*, $H_1 =$ *"l'urna contiene 3 palline bianche e 3 nere"*,$H_2 =$ *"l'urna contiene 6 palline bianche"*. Dall'urna si effettuano 3 estrazioni in blocco ottenendo 3 palline bianche (evento E). Supposto $P(H_1) = 12P(H_2) = 12p$, calcolare il rapporto $r = \frac{P(H_1|E)}{P(H_2|E)}$. Inoltre, supposto di estrarre un'altra pallina e posto $A =$ *"la quarta pallina estratta è bianca"*, calcolare $\alpha = P(A|E)$.

   $r =$ $\alpha =$

4. Due veicoli partono contemporaneamente da una stessa posizione, con velocità (in km/h) rispettive $V = 2X$ e $W = \frac{X}{2}$, dove X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Indicando con Z la distanza aleatoria tra i due veicoli dopo 2 ore, calcolare: la previsione m di Z, la probabilità p dell'evento condizionato $(Z > 6|Z > 3)$ e il coefficiente di correlazione ρ di V, W.

   $m =$ $p =$ $\rho =$

5. I guadagni aleatori di due investimenti sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{8}}, \forall(x, y)$. Calcolare la funzione caratteristica di $Z = X + Y$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(Z \geq 2)|(2 - \sqrt{5} \leq Z \leq 2 + \sqrt{5})$. (*ricordiamo che, se $X \sim N_{m,\sigma}$, allora $\varphi_X(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$*)

   $\varphi_Z(t) =$ $p =$

6. Un sistema S è formato da 2 dispositivi d_1, d_2 in parallelo, con d_2 che entra in funzione nell'istante in cui si guasta d_1, con durate aleatorie X, Y. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la funzione di rischio $h_Z(z)$ della durata aleatoria Z di S.

   $k =$ $h_Z(z) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 2, \sigma_0 = 4$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_6)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_6)$, con $x_1 + \cdots + x_6 = 12$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(\frac{6}{5} \leq \Theta \leq \frac{18}{5} \mid \mathbf{x})$. Supposto inoltre che $\left(\frac{\Theta - a}{b} \mid \mathbf{x}\right) \sim N_{0,1}$, con $b > 0$, calcolare a e b.

   $p =$ $a =$ $b =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 19/11/2012.

1. I costituenti relativi ad A, B, C sono: $ABC^c = (Z \in \{1,2\}), AB^cC^c = (Z = 3)$, $A^cB^cC^c = (Z \in \{4,5\})$, $A^cB^cC = (Z = 6), A^cBC = (Z \in \{7,8\})$. Si ha $X \in \{-1,0,2\}$, con $P(X = -1) = P(ABC^c \vee A^cBC) = P(Z \in \{1,2,7,8\}) = \frac{1}{2}$, $P(X = 0) = P(A^cB^cC^c) = P(Z \in \{4,5\}) = \frac{1}{4} = P(Z \in \{3,6\}) = P(X = 2)$. Allora: $m = \mathbb{P}(X) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{4} \cdot 2 = 0$, $\mathbb{P}(X^2) = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 = \frac{3}{2}$, $\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

2. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero $\int_0^1 adx + \int_1^2 2adx + \int_2^3 adx = 4a = 1$; pertanto: $a = \frac{1}{4}$.
Inoltre, dalla condizione $\int_{-\infty}^{M} f(x)dx = \frac{1}{2}$ segue $M = \frac{3}{2}$.
Infine, $F(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F(x) = 1$ per $x \geq 3$.
Per $x \in (0,1]$ si ha: $F(x) = \int_0^x \frac{1}{4}dt = \frac{x}{4}$;
per $x \in (1,2]$ si ha: $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{4}dt + \int_1^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{4} + \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$;
per $x \in (2,3)$ si ha: $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{4}dt + \int_1^2 \frac{1}{2}dt + \int_2^x \frac{1}{4}dt = \frac{3}{4} + \frac{x-2}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.

3. Si ha: $P(E|H_1) = \frac{\binom{3}{3}\binom{3}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{20}\,,\ P(E|H_2) = 1\,,\ P(E|H_0) = 0$ (e quindi $P(H_0|E) = 0$); allora
$$P(H_1|E) = \frac{P(E|H_1)P(H_1)}{\sum_r P(E|H_r)P(H_r)} = \frac{\frac{12p}{20}}{\frac{12p}{20} + p} = \frac{3}{8}\,,\quad P(H_2|E) = 1 - P(H_1|E) = \frac{5}{8}\,,$$
con $r = \frac{3}{5}$. Inoltre, ricordando la formula $P(AB|H) = P(A|H)P(B|AH)$ e osservando che $P(A|H_1E) = 0, P(A|H_2E) = 1$, segue
$$\alpha = P(A|E) = P(AH_1 \vee AH_2|E) = P(AH_1|E) + P(AH_2|E) =$$
$$= P(A|H_1E)P(H_1|E) + P(A|H_2E)P(H_2|E) = P(H_2|E) = \frac{5}{8}\,.$$

4. La distanza aleatoria (in km) al tempo t tra i due veicoli è pari a $Vt - Wt = (2X - \frac{X}{2})t = \frac{3}{2}Xt$. Pertanto, per $t = 2$ si ha $Z = 3X$ e quindi $m = \mathbb{P}(Z) = 3\mathbb{P}(X) = 3 \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2}$.
Inoltre, ricordando che $P(X > x + y|X > y) = P(X > x)$ per ogni $x > 0, y > 0$, segue
$$p = P(Z > 6|Z > 3) = \frac{P(Z > 6, Z > 3)}{P(Z > 3)} = \frac{P(Z > 6)}{P(Z > 3)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = P(X > 1) = e^{-2}\,.$$
Infine, ricordando che se $Y = aX + b$ allora $\rho_{XY} = \frac{a}{|a|} = \pm 1$, osservando che tra V e W vale la relazione $V = 2X = 4 \cdot \frac{X}{2} = 4W$, segue $\rho = 1$.

5. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{8}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{8}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{1,2}(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} = N_{1,1}(x)\,,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{8}} dx = \cdots = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{8}} = N_{1,2}(y)\,,$$

con $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, $\forall (x,y)$; pertanto X e Y sono stocasticamente indipendenti. Allora $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{it-\frac{t^2}{2}} e^{it-\frac{4t^2}{2}} = e^{2it-\frac{5t^2}{2}}$; ovvero $Z \sim N_{2,\sqrt{5}}$. Pertanto

$$p = \frac{P(Z \geq 2\,,\, 2-\sqrt{5} \leq Z \leq 2+\sqrt{5})}{P(2-\sqrt{5} \leq Z \leq 2+\sqrt{5})} = \frac{P(2 \leq Z \leq 2+\sqrt{5})}{P(2-\sqrt{5} \leq Z \leq 2+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\Phi_{2,\sqrt{5}}(2+\sqrt{5}) - \Phi_{2,\sqrt{5}}(2)}{\Phi_{2,\sqrt{5}}(2+\sqrt{5}) - \Phi_{2,\sqrt{5}}(2-\sqrt{5})} = \frac{\Phi(1)-\Phi(0)}{\Phi(1)-\Phi(-1)} = \frac{\Phi(1)-\frac{1}{2}}{2\Phi(1)-1} = \frac{1}{2}\,.$$

6. Si ha $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} k e^{-x-y} dx dy = \cdots = k$; allora dalla condizione $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$ segue $k = 1$. Inoltre, per ogni $z > 0$, si ha

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-x-y} dy =$$

$$= \int_0^z e^{-x}(1 - e^{-(z-x)}) dx = \int_0^z e^{-x} dx - e^{-z} \int_0^z dx = 1 - e^{-z} - z e^{-z}\,,$$

da cui segue: $S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = e^{-z} + z e^{-z}$, $f_Z(z) = F'_Z(z) = z e^{-z}$.
Pertanto, per $z > 0$, si ha: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{z}{1+z}$.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_6,\sigma_6}$, con $m_6 = m_0 = 2$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 2$. Inoltre $\frac{1}{\sigma_6^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{6}{\sigma^2} = \frac{25}{16}$ e quindi $\sigma_6 = \frac{4}{5}$; pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{2,\frac{4}{5}}$. Allora

$$P\left(\frac{6}{5} \leq \Theta \leq \frac{18}{5} \mid \mathbf{x}\right) = \Phi_{2,\frac{4}{5}}\left(\frac{18}{5}\right) - \Phi_{2,\frac{4}{5}}\left(\frac{6}{5}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{18}{5}-2}{\frac{4}{5}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{6}{5}-2}{\frac{4}{5}}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \simeq 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185\,.$$

Inoltre $\left(\frac{\Theta-a}{b} \mid \mathbf{x}\right) \sim N_{\frac{2-a}{b},\frac{4}{5b}} = N_{0,1}$ se e solo se $a = 2, b = \sigma_6 = \frac{4}{5}$.
In altri termini: $X = \frac{\Theta - m_6}{\sigma_6}$.