Probabilità e Statistica *(Ing. Amb. Terr. - Latina - 27/01/2012)*

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Sia R il rettangolo di vertici i punti $(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y)=kxy$, per $(x,y)\in R$, con $f(x,y)=0$ altrove. Calcolare la costante k e la probabilità p dell'evento $(m-\sigma\leq X\leq m+\sigma)$, dove m e σ sono la previsione e lo scarto quadratico medio di X.

   $k=$ $\qquad\qquad$ $p=$

2. Da un'urna contenente 1 pallina bianca e 4 nere si effettuano 5 estrazioni senza restituzione (Tizio effettua la prima e la seconda estrazione, Caio la terza e la quarta). Se uno dei due estrae la pallina bianca vince un premio. Posto $E_i=$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i=1,2,3,4,5$, $A=$ *"Tizio vince il premio"*, $B=$ *"Caio vince il premio"*, calcolare: $P(B)$ e $P(B\,|\,E_5^c)$.

   $P(B)=$ $\qquad\qquad$ $P(B\,|\,E_5^c)=$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X=|A|-|B|$.

   $\varphi(t)=$

4. Una macchina M produce 3 pezzi, ognuno dei quali è difettoso con probabilità $\frac{1}{5}$ indipendentemente dagli altri pezzi. Sia X il numero aleatorio di pezzi difettosi fra i 3 prodotti da M. Supposto che due pezzi estratti a caso risultino entrambi buoni (evento E); calcolare la probabilità che i 3 pezzi siano tutti buoni (evento H_0) condizionata all'evento E.

   $P(H_0|E)=$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y)=\frac{1}{6\pi}\,e^{-\frac{(x-5)^2}{18}-\frac{y^2}{2}}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, calcolare la mediana M del numero aleatorio X.

   stoc. indip.? $\qquad\qquad$ $M=$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y)=e^{-(ax+y)}$, per $x\geq 0$, $y\geq ax$, $a>0$, con $f(x,y)=0$ altrove. Calcolare la costante a e la funzione di rischio $h_2(y)$ del numero aleatorio Y, per $y>0$.

   $a=$ $\qquad\qquad$ $h_2(y)=$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale di parametri $m_0=0,\sigma_0=2$. Le componenti di un campione casuale $(X_1,\cdots,X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto quadratico medio $\sigma=\frac{1}{4}$. Posto $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, con $x_1+\cdots+x_n=0$, siano m_n e σ_n la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(-2\sigma_n\leq\Theta\leq 2\sigma_n)|\mathbf{x}$ e stabilire per quali valori di n l'ampiezza dell'intervallo $[m_n-2\sigma_n,m_n+2\sigma_n]$ è minore di $\frac{1}{2}$.

   $p=$ $\qquad\qquad$ $n\in$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 27/01/2012.

1. Si ha: $\int\int_R f(x,y)dxdy = k\int_0^2 xdx \int_0^1 ydy = \frac{k}{2}\int_0^2 xdx = k$; quindi $k=1$. Inoltre

$$f_1(x) = \int_0^1 xydy = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{x}{2}\,, \quad F_1(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{x^2}{2}\,, \quad 0 \le x \le 2\,;$$

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^2 xf_1(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}\,;\ \mathbb{P}(X^2) = \int_0^2 x^2 f_1(x)dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx = 2\,;$$

$$Var(X) = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}\,, \quad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0.47\,, \quad m-\sigma = \frac{4-\sqrt{2}}{3} > 0\,,\ m+\sigma = \frac{4+\sqrt{2}}{3} < 2\,.$$

Pertanto:

$$p = P(m-\sigma \le X \le m+\sigma) = \int_{\frac{4-\sqrt{2}}{3}}^{\frac{4+\sqrt{2}}{3}} \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{4-\sqrt{2}}{3}}^{\frac{4+\sqrt{2}}{3}} = \cdots = \frac{4\sqrt{2}}{9} \simeq 0.6285\,.$$

In altro modo: $p = P(m-\sigma \le X \le m+\sigma) = F_1(m+\sigma) - F_1(m-\sigma) = \frac{(m+\sigma)^2}{2} - \frac{(m-\sigma)^2}{2} = = \cdots = m\cdot\sigma = \frac{4\sqrt{2}}{9} \simeq 0.6285$.

2. Gli eventi sono scambiabili, con $P(E_i) = \frac{1}{5}$, $i = 1,2,3,4,5$, $E_iE_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$. Pertanto $P(B) = P(E_3 \vee E_4) = \frac{2}{5} = P(E_1 \vee E_2) = P(A)$. Infine, osservando che

$$E_5^c = E_1 \vee \cdots \vee E_4 = A \vee B\,, \quad AB = \emptyset\,, \quad A \wedge (A \vee B) = A\,,$$

segue: $P(A \vee B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{5}\,, \quad P(B\,|\,E_5^c) = P(B\,|\,A \vee B) = \frac{P(B)}{P(A\vee B)} = \frac{1}{2}$.

3. Si hanno tre costituenti: $A = E_1 \vee E_2\,, \quad B = E_3 \vee E_4\,, \quad A^cB^c = E_5$; quindi $X \in \{-1,0,1\}$, con

$$P(X=-1) = P(B) = \frac{2}{5} = P(A) = P(X=1)\,, \quad P(X=0) = P(A^cB^c) = P(E_5) = \frac{1}{5}\,.$$

Pertanto

$$\varphi(t) = \sum_{h=-1}^{1} p_h e^{ith} = \frac{2e^{-it} + 1 + 2e^{it}}{5} = \cdots = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\,cos\,t\,.$$

4. Si ha $X \sim B(3, \frac{1}{5})$, con $H_0 = (X=0)$ e con

$$P(X=h) = \binom{3}{h}\left(\frac{1}{5}\right)^h\left(\frac{4}{5}\right)^{3-h}\,,\ h = 0,1,2,3\,;$$

ovvero, posto $H_r = (X=r)$, si ha

$$P(H_0) = \left(\frac{4}{5}\right)^3\,,\ P(H_1) = 3\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\,,\ ...$$

Inoltre

$$P(E|H_0) = 1\,,\ P(E|H_1) = \frac{\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}\,,\ P(E|H_2) = P(E|H_3) = 0\,.$$

Allora

$$P(E) = \sum_{r=0}^{3} P(E|H_r)P(H_r) = P(E|H_0)P(H_0) + P(E|H_1)P(H_1) = 1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 3\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{112}{125}\,,$$

$$P(H_0|E) = \frac{P(E|H_0)P(H_0)}{P(E)} = \frac{1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3}{\frac{112}{125}} = \frac{4}{7}\,.$$

5. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \cdots = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}\,, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\,,$$

con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Pertanto, i numeri aleatori X e Y sono stocasticamente indipendenti, con $X \sim N_{5,3}(x)$, $Y \sim N(y)$. Inoltre, ricordando che $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ (e che Φ è crescente), si ha

$$\int_{-\infty}^{M} f_1(x)dx = \frac{1}{2} = \Phi_{5,3}(M) = \Phi(\frac{M-5}{3}) = \Phi(0)\,;$$

quindi: $\frac{M-5}{3} = 0$; ovvero: $M = 5 = \mathbb{P}(X)$.

6. Si ha

$$\int_0^{+\infty}\int_{ax}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} e^{-ax}dx \int_{ax}^{+\infty} e^{-y}dy = \int_0^{+\infty} e^{-ax}e^{-ax}dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} 2ae^{-2ax}dx = \frac{1}{2a} = 1\,;$$

pertanto: $a = \frac{1}{2}$, con $f(x,y) = e^{-(\frac{x}{2}+y)}$, per $x \geq 0$, $y \geq \frac{x}{2}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre

$$f_2(y) = \int_0^{2y} e^{-(\frac{x}{2}+y)}dx = \cdots = 2e^{-y} - 2e^{-2y}\,;$$

allora

$$S_2(y) = P(Y > y) = \int_y^{+\infty} f_2(t)dt = 2\int_y^{+\infty} e^{-t}dt - \int_y^{+\infty} 2e^{-2t}dt = 2e^{-y} - e^{-2y}\,.$$

Pertanto

$$h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{2e^{-y} - 2e^{-2y}}{2e^{-y} - e^{-2y}} = \frac{2e^y - 2}{2e^y - 1} = 1 - \frac{1}{2e^y - 1}\,.$$

7. Si ha $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}$, con

$$m_n = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2}\cdot\bar{\mathbf{x}}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = 0\,, \quad \frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 16n = \frac{1+64n}{4}\,,\ \sigma_n = \frac{2}{\sqrt{1+64n}}\,.$$

Allora

$$p = P[(-2\sigma_n \leq \Theta \leq 2\sigma_n)|\mathbf{x}] = \Phi_{0,\sigma_n}(2\sigma_n) - \Phi_{0,\sigma_n}(-2\sigma_n) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \ \simeq\ 0.9544\,;$$

inoltre, l'ampiezza dell'intervallo $[m_n - 2\sigma_n, m_n + 2\sigma_n]$ è $4\sigma_n = \frac{8}{\sqrt{1+64n}} < \frac{1}{2}$ per $n \geq 4$.