Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 14/6/2013)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 2e^{-x-y}$ per $x \geq 0, 0 \leq y \leq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Posto $Z = X - Y$, calcolare la funzione di rischio $h_Z(z)$ e la probabilità α dell'evento condizionato $(Z > 5|Z > 3)$.

   $h_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. Tizio e Caio lanciano ognuno per 3 volte un dado. Siano definiti gli eventi $A_i =$ *"nell'i-mo lancio Tizio ottiene un risultato minore di 5"*, $i = 1, 2, 3$; $B_j =$ *"nel j-mo lancio Caio ottiene un risultato maggiore di 2"*, $j = 1, 2, 3$; $H =$ *"Tizio ottiene almeno una volta un risultato minore di 5"*; $K =$ *"Caio ottiene al massimo 2 volte un risultato maggiore di 2"*. Calcolare $P(H \vee K)$ e $Cov(HK, H \vee K)$.

   $P(H \vee K) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(HK, H \vee K) =$

3. Un lotto L di 3 pezzi è stato prodotto da un'apparecchiatura A (ipotesi H), oppure B (ipotesi H^c). Ogni pezzo (indipendentemente dagli altri) è difettoso con probabilità $\frac{1}{3}$ se prodotto da A, con probabilità $\frac{1}{4}$ se prodotto da B. Supposto $P(H) = \frac{1}{2}P(H^c)$, sia X il numero aleatorio di pezzi difettosi nel lotto. Calcolare la probabilità $p = P(X \leq 2)$. Inoltre, supposto che almeno un pezzo del lotto sia difettoso (evento E), calcolare la probabilità α che il lotto sia stato prodotto da A.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

4. Il codominio di un vettore aleatorio discreto (X, Y) è $\{(-1, 1), (-1, 0), (1, 0), (1, -1)\}$, con $p(-1, 0) = p(1, 0) = \alpha < \frac{1}{2}, p(-1, 1) = p(1, -1)$, dove $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$. Calcolare $Cov(X, Y)$ e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, stabilire se per qualche valore di $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ i numeri aleatori $X - 2Y$ e $-2X + Y$ sono incorrelati.

   $Cov(X, Y) =$ $\qquad\qquad$ *Indip. St.*? $\qquad\qquad$ $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $\alpha = \frac{1}{4}$, calcolare la funzione di ripartizione e la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $F_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

6. Due veicoli V e W, posizionati in un punto A, partono con velocità aleatorie rispettive X e Y verso un punto B. Sia T il trapezio di vertici i punti $(1, 1), (3, 1), (3, 4), (1, 2)$. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = axy$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la probabilità p che W arrivi in B prima di V.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $p =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è esponenziale di parametro $\lambda = 1$; inoltre ciascuna componente X_i di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, ha una densità $f_{X_i}(x_i|\theta) = \theta^2 x_i e^{-\theta x_i}$, $x_i \geq 0$, con $f_{X_i}(x_i|\theta) = 0$ altrove. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_4)$, con $x_1 \cdots x_4 = a, x_1 + \cdots + x_4 = t$, calcolare la previsione m_4 e lo scarto quadratico medio σ_4 di $\Theta|\mathbf{x}$.

   $m_4 =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_4 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 14/6/2013.

1. Si ha $Z \geq 0$ e per ogni fissato $z > 0$ l'evento $(Z > z)$ è vero se e solo se (X, Y) appartiene all'insieme $D = \{(x, y) : x \geq z, 0 \leq y < x - z\}$; pertanto

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(Y < X - z) = \int\int_D f(x, y)dxdy = \int_z^{+\infty} dx \int_0^{x-z} 2e^{-x-y}dy =$$

$$= 2\int_z^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-x+z})dx = 2\int_z^{+\infty} e^{-x}dx - e^z \int_z^{+\infty} 2e^{-2x}dx = 2e^{-z} - e^z e^{-2z} = e^{-z}.$$

Pertanto: $h_Z(z) = -\frac{S'_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{e^{-z}}{e^{-z}} = 1$; ovvero Z ha una distribuzione esponenziale di parametro 1. Inoltre

$$\alpha = P(Z > 5|Z > 3) = \frac{P(Z > 5, Z > 3)}{P(Z > 3)} = \frac{P(Z > 5)}{P(Z > 3)} = \frac{e^{-5}}{e^{-3}} = e^{-2} = P(Z > 2).$$

(*proprietà di assenza di memoria:* $P(Z > 5|Z > 3) = P(Z > 2 + 3\,|\,Z > 3) = P(Z > 2)$)

2. Si ha: $P(A_i) = \frac{2}{3}, i = 1, 2, 3; P(B_j) = \frac{2}{3}, j = 1, 2, 3$; allora

$$P(H) = P(A_1 \vee A_2 \vee A_3) = 1 - P(A_1^c A_2^c A_3^c) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) = \frac{26}{27};$$

$$P(K) = P(B_1^c \vee B_2^c \vee B_3^c) = 1 - P(B_1 B_2 B_3) = 1 - P(B_1)P(B_2)P(B_3) = \frac{19}{27};$$

$$P(H \vee K) = P(H) + P(K) - P(HK) = P(H) + P(K) - P(H)P(K) = \frac{721}{729} \simeq 0.989.$$

Inoltre

$$Cov(HK, H \vee K) = P[(HK) \wedge (H \vee K)] - P(HK)P(H \vee K) = P(HK) - P(HK)P(H \vee K) =$$

$$P(HK)[1 - P(H \vee K)] = P(HK)P(H^c K^c) = \frac{26}{27} \cdot \frac{19}{27} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{8}{27} = \frac{3952}{531441} \simeq 0.0074.$$

3. Si ha $P(H) = \frac{1}{3}$, $P(H^c) = \frac{2}{3}$, $p = P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3)$, con $P(X = 3) =$
$= P(X = 3|H)P(H) + P(X = 3|H^c)P(H^c) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \frac{1}{3} + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \frac{2}{3} =$
$= \frac{177}{7776} \simeq 0.0228$; pertanto: $p = P(X \leq 2) = 1 - \frac{177}{7776} \simeq 0.9772$.
Inoltre $E = (X \geq 1)$, $E^c = (X = 0)$, $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P(X = 0)$, con

$$P(X = 0) = P(X = 0|H)P(H) + P(X = 0|H^c)P(H^c) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{985}{2592} \simeq 0.38;$$

pertanto: $P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(H)-P(E^c H)}{P(E)} = \frac{P(H)[1-P(E^c|H)]}{P(E)} =$

$$= \frac{P(H)[1 - P(X = 0|H)]}{1 - P(X = 0)} = \frac{\frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right]}{1 - \frac{985}{2592}} = \frac{\frac{19}{81}}{\frac{1607}{2592}} = \frac{608}{1607} \simeq 0.3783.$$

4. Si ha $p(-1,1) = p(1,-1) = \frac{1}{2} - \alpha$, $X \in \{-1,1\}$, con
$$P(X=-1) = p(-1,0) + p(-1,1) = \alpha + \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} = p(1,0) + p(1,-1) = P(X=1)\,;$$
pertanto $\mathbb{P}(X) = 0, \mathbb{P}(X^2) = 1, \sigma_X^2 = 1$. Inoltre
$$XY \in \{-1,0\}\,,\ P(XY=0) = 2\alpha\,,\ P(XY=-1) = 1-2\alpha\,,\ \mathbb{P}(XY) = -1+2\alpha\,;$$
allora: $Cov(X,Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = -1+2\alpha < 0$, per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$. Pertanto, X e Y non sono indipendenti. Inoltre $Y \in \{-1,0,1\}$, con
$$P(Y=0) = p(-1,0) + p(1,0) = 2\alpha\,,\ P(Y=-1) = P(Y=1) = \frac{1}{2} - \alpha\,;$$
pertanto $\mathbb{P}(Y) = 0$, $\mathbb{P}(Y^2) = 1-2\alpha = \sigma_Y^2$. Allora
$$Cov(X-2Y, -2X+Y) = -2Cov(X,X) + Cov(X,Y) + 4Cov(Y,X) - 2Cov(Y,Y) =$$
$$= -2Var(X) + 5Cov(X,Y) - 2Var(Y) = -2-5+10\alpha-2+4\alpha = -9+14\alpha < 0\,,\ \forall\,\alpha \in [0,\frac{1}{2})\,.$$
Pertanto, per nessun valore di α in $[0,\frac{1}{2})$ i numeri aleatori $X-2Y$ e $-2X+Y$ sono incorrelati.

5. Si ha $Z \in \{-1,0,1\}$, con
$$P(Z=-1) = p(-1,0) = \frac{1}{4} = p(1,0) = P(Z=1)\,,\ \ P(Z=0) = \frac{1}{2}\,;$$
allora: per $z < -1$ si ha $F_Z(z) = P(Z \leq z) = 0$; per $-1 \leq z < 0$ si ha $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z=-1) = \frac{1}{4}$; per $0 \leq z < 1$ si ha $F_Z(z) = P(Z=-1) + P(Z=0) = \frac{3}{4}$; per $z \geq 1$ si ha $F_Z(z) = 1$. Inoltre
$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{it} = \frac{2+e^{-it}+e^{it}}{4} = \frac{2+2\cos t}{4} = \frac{1+\cos t}{2}\,.$$

6. Dalla condizione $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$, osservando che l'equazione della retta passante per i punti $(1,2),(3,4)$ è $y = x+1$, segue
$$\int_1^3 dx \int_1^{x+1} axydy = \frac{a}{2}\int_1^3 x[y^2]_1^{x+1}dx = \frac{a}{2}\int_1^3 (x^3+2x^2)dx = \frac{a}{2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{56}{3}a = 1\,;$$
pertanto $a = \frac{3}{56}$. Inoltre, W arriva in B prima di V se e solo se si verifica l'evento $(Y > X)$; pertanto
$$p = P(Y > X) = \int_1^3 dx \int_x^{x+1} \frac{3}{56}xydy = \frac{3}{112}\int_1^3 x[y^2]_x^{x+1}dx = \frac{3}{112}\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{4}{7}\,.$$

7. Si ha $\beta(\theta) = e^{-\theta}, \theta \geq 0$; $f_{X_i}(x_i|\theta) = \theta^2 x_i e^{-\theta x_i} = G_{2,\theta}(x_i)$, $i = 1,2,3,4$; per la funzione di verosimiglianza, si ha $\alpha(\theta|\mathbf{x}) = \theta^2 x_1 e^{-\theta x_1} \cdot \theta^2 x_2 e^{-\theta x_2} \cdot \theta^2 x_3 e^{-\theta x_3} \cdot \theta^2 x_4 e^{-\theta x_4} = a\theta^8 e^{-t\theta}$. Pertanto
$$\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\theta|\mathbf{x}) = ak(\mathbf{x})e^{-\theta}\theta^8 e^{-t\theta} = k_1(\mathbf{x})\theta^8 e^{-(t+1)\theta}\,,\ \theta \geq 0\,;$$
ovvero $\Theta|\mathbf{x} \sim G_{9,t+1}(\theta)$, con $k_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} = \frac{(t+1)^9}{8!}$. Allora
$$m_4 = \mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{9}{t+1}\,,\quad \sigma_4 = \sqrt{\frac{c}{\lambda^2}} = \frac{3}{t+1}\,.$$