Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 15/4/2013)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Date due urne U e V, contenenti 2 palline bianche e 3 nere, Tizio e Caio effettuano, rispettivamente da U e V, 2 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $A_i =$ *"l'i-ma pallina estratta da Tizio è bianca"*, $i = 1, 2$, $B_j =$ *"la j-ma pallina estratta da Caio è bianca"*, $j = 1, 2$, sia X (risp., Y) il numero aleatorio di palline bianche estratte da Tizio (risp., Caio). Calcolare: (i) la probabilità p dell'evento condizionato $(X = 2|X + Y = 2)$; (ii) la covarianza della coppia $(X - Y, Y)$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $Cov(X - Y, Y) =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $Z = X+Y$, calcolare la probabilità dell'evento $(Z = h)$, per ogni $h \in \{0, 1, \ldots, 4\}$, e la funzione caratteristica di Z.

   $P(Z = h) =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

3. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul quadrato $Q = [1, 3] \times [2, 4]$. Indicando con σ_1, σ_2 gli scarti quadratici medi di X, Y, calcolare le probabilità $\alpha = P(2-\sigma_1 \leq X \leq 2+\sigma_1)$ e $\beta = P(3-\sigma_2 \leq Y \leq 3+\sigma_2)$; inoltre, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $(X \leq 2 + \sigma_1 \,|\, Y \leq 3 + \sigma_2)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

4. Dati tre eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{1}{3}$, $P(E_1^c \vee E_2^c) = \frac{8}{9}$, $P(E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c) = \frac{26}{27}$, calcolare: (i) $\alpha = P(E_2 \vee E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3)$; (ii) $\beta = P(E_2 \,|\, E_1 E_3^c)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-x-y}$, per $(x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) : x \geq 0,\, y \geq x\}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la costante positiva c tale che $P(0 \leq Y - X \leq c) = \frac{1}{2}$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $c =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di $Z = Y - X$.

   $S_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

7. Da un gruppo di 10 studenti, dei quali 2 non sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 3. Successivamente, il quesito viene sottoposto a due dei 3 studenti (scelti a caso). Definiti gli eventi $H_r =$ *"fra i 3 studenti estratti a caso ve ne sono r che non sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$; $A =$ *"i 2 studenti scelti a caso sanno risolvere il quesito"*, calcolare $\alpha = P(A)$ e la probabilità p che tutti e tre gli studenti estratti sappiano risolvere il quesito, condizionata ad A.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 15/4/2013.

1. Gli eventi A_1, A_2, B_1, B_2 sono equiprobabili, con $P(A_i) = P(B_j) = \frac{2}{5}$. Inoltre $X = |A_1| + |A_2| \sim H(5, 2, \frac{2}{5})$, $Y = |B_1| + |B_2| \sim H(5, 2, \frac{2}{5})$, con X e Y stocasticamente indipendenti, e con $P(X = 0) = P(Y = 0) = p_0 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $P(X = 2) = P(Y = 2) = p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, $P(X = 1) = P(Y = 1) = 1 - p_0 - p_2 = \frac{6}{10}$. Allora, osservando che $P(X = h, Y = k) = P(X = h)P(Y = k) = p_h p_k$, segue:

$$p = P(X = 2|X+Y = 2) = \frac{P(X = 2, X + Y = 2)}{P(X + Y = 2)} = \frac{P(X = 2, Y = 0)}{P(X + Y = 2)} = \frac{p_{20}}{p_{02} + p_{11} + p_{20}} =$$

$$= \frac{p_2 p_0}{p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10}} = \frac{1}{14}\,.$$

$$Cov(X - Y, Y) = Cov(X, Y) - Cov(Y, Y) = -Var(Y) = -npq \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = -\frac{9}{25}\,.$$

2. Ricordando che X e Y sono indipendenti e ugualmente distribuiti, si ha

$$P(Z = 0) = p_0 p_0 = \frac{9}{100}\,,\ P(Z = 1) = p_0 p_1 + p_1 p_0 = \frac{36}{100}\,,\ P(Z = 2) = p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0 = \frac{42}{100}\,,$$

$$P(Z = 3) = p_1 p_2 + p_2 p_1 = \frac{12}{100}\,,\ P(Z = 4) = p_2 p_2 = \frac{1}{100}\,.$$

Allora:

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \sum_{h=0}^{4} p_h e^{ith} = \frac{9 + 36e^{it} + 42e^{2it} + 12e^{3it} + e^{4it}}{100}\,.$$

3. L'area di Q è pari a 4; pertanto $f(x, y) = \frac{1}{4}$, per $(x, y) \in Q$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Inoltre, come si può facilmente verificare, le distribuzioni marginali sono ancora uniformi; cioè: $X \sim U([1, 3])$, $Y \sim U([2, 4])$; quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti e si ha: $Var(X) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3} = \frac{(4-2)^2}{12} = Var(Y)$; pertanto: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Allora, osservando che $f_1(x) = \frac{1}{2} = f_2(y)$, per $x \in [1, 3], y \in [2, 4]$, con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove, segue

$$\alpha = \int_{2-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{2+\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}\,dx = \int_{3-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{3+\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}\,dy = \beta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0.5774\,;$$

$$\gamma = \frac{P(X \leq 2 + \sigma_1,\, Y \leq 3 + \sigma_2)}{P(Y \leq 3 + \sigma_2)} = \frac{P\left(X \leq 2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) P\left(Y \leq 3 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{P\left(Y \leq 3 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)} =$$

$$= P\left(X \leq 2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \int_1^{2+\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{\frac{1}{3}} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.7887\,.$$

4. Si ha

$$P(E_i) = P(E_1) = \frac{1}{3},\ P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9},\ P(E_1E_2E_3) = 1 - \frac{26}{27} = \frac{1}{27}\,.$$

Allora: $P(E_2 \vee E_3) = 2P(E_1) - P(E_1E_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$; inoltre

$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 3P(E_1) - 3P(E_1E_2) + P(E_1E_2E_3) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{19}{27}\,.$$

Pertanto

$$\alpha = P(E_2 \vee E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_2 \vee E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{19}{27}} = \frac{15}{19}\,;$$

$$\beta = P(E_2 \,|\, E_1E_3^c) = \frac{P(E_1E_2E_3^c)}{P(E_1E_3^c)} = \frac{P(E_1E_2) - P(E_1E_2E_3)}{P(E_1) - P(E_1E_2)} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{27}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = P(E_2)\,.$$

(*Nota: gli eventi E_1, E_2, E_3 sono stocasticamente indipendenti*)

5. Dev'essere: $\int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} ae^{-x-y}dy = \frac{a}{2}\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx = \frac{a}{2} = 1$; pertanto: $a = 2$.
Inoltre, indicando con $\mathcal{S}$ la striscia contenuta nel primo quadrante compresa tra le rette di equazione $y = x$, $y = x + c$, si ha

$$P(0 \le X - Y \le c) = P[(X,Y) \in \mathcal{S}] = \int\!\!\int_{\mathcal{S}} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{x+c} 2e^{-x-y}dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(2e^{-x}\int_x^{x+c} e^{-y}dy\right)dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}(1 - e^{-c})dx = 1 - e^{-c} = \frac{1}{2}\,.$$

Allora: $e^c = 2$; pertanto: $c = log\,2$.

6. Essendo $(X,Y) \in \mathcal{C}$, segue $Z = Y - X \in [0,+\infty)$; inoltre, fissato $z > 0$, si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(Y > X + z) = \int_0^{+\infty} dx \int_{x+z}^{+\infty} 2e^{-x-y}dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}e^{-z}dx = e^{-z}\,,$$

con $f_Z(z) = -S_Z'(z) = e^{-z}$; ovvero Z ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Allora, per ogni fissato $z > 0$, si ha: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{e^{-z}}{e^{-z}} = 1$.

7. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{8}{3-r}}{\binom{10}{3}}$, $r = 0,1,2$; quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}\,,\quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}\,,\quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15}\,,$$

con $P(A|H_0) = 1$, $P(A|H_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(A|H_2) = 0$. Allora

$$\alpha = P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 1 \cdot \frac{7}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{15} = \frac{28}{45}\,;$$

inoltre:

$$p = P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0)P(H_0)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{7}{15}}{\frac{28}{45}} = \frac{3}{4}\,.$$