Probabilità e Statistica *(Ing. Amb. Terr. - Latina -* 15/2/2013)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. La densità di un numero aleatorio continuo $X \in [0,3]$ è $f(x) = \frac{a}{2}$ per $x \in [0,1]$, $f(x) = a$ per $x \in [1,2]$, $f(x) = 2a$ per $x \in (2,3)$. Calcolare la costante a, la funzione di ripartizione e la mediana M.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $M =$

2. Sia Z il risultato aleatorio di un'estrazione a caso da un'urna contenente n palline numerate da 1 a n, con $P(Z = k) = \frac{1}{10}, k = 1, \ldots, n$. Siano inoltre definiti gli eventi $A = (Z < 5)$, $B = (Z < 3) \vee (Z > 8)$, $C = (Z > 6)$. Determinare il numero n e la previsione m del numero aleatorio $X = |A| - 2|B| + |C|$. Inoltre, calcolare i costituenti relativi ad A, B, C e le loro probabilità.

   $n =$ $\qquad\qquad$ $m =$ $\qquad\qquad$ *costituenti :*

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = k(x + y)$, per $(x, y) \in [0,2] \times [0,2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $k =$ $\qquad\qquad$ *X, Y indipendenti ?*

4. Un'urna di composizione incognita contiene $n + 1$ palline, con $n \geq 1$; le ipotesi possibili sulla composizione dell'urna sono: $H =$ *"l'urna contiene 1 pallina nera ed n bianche"*, $H^c =$ *"l'urna contiene tutte palline bianche"*. Dall'urna si effettuano n estrazioni senza restituzione ottenendo n palline bianche (evento $A_n = E_1 \cdots E_n$, con $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*). Supposto $P(H) = 10P(H^c) = 10p$, calcolare i valori di n tali che $r = \frac{P(H|A_n)}{P(H^c|A_n)} < \frac{1}{10}$. Inoltre, supposto di estrarre anche l'ultima pallina e posto $E_{n+1} =$ *"l'(n+1)-ma pallina estratta è bianca"*, calcolare i valori di n tali che $\alpha = P(E_{n+1}|A_n) > \frac{9}{10}$.

   $n =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

5. I guadagni aleatori ottenuti da un investimento in due periodi distinti sono rispettivamente X e Y, con $\varphi_X(t) = e^{it - \frac{t^2}{2}}$, $\varphi_Y(t) = e^{2it - 2t^2}$. Supposto X e Y stocasticamente indipendenti, calcolare la densità di probabilità del numero aleatorio $Z = Y - X$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(Z \geq 1 + 2\sqrt{5} \mid Z \geq 1 + \sqrt{5})$.
   (*ricordiamo che per una distribuzione $N_{m,\sigma}$ si ha $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$*)

   $Z \sim$ $\qquad\qquad$ $p =$

6. La funzione di rischio di un numero aleatorio $X \in (1, +\infty)$ è $h(x) = \frac{2}{x}$. Calcolare la densità di probabilità $f(x)$, per $x > 1$, e la previsione m di X.

   $f(x) =$ $\qquad\qquad$ $m =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale di parametri m_0, σ_0. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, stabilire: (i) per quali valori di k risulta $P(m_n - k\sigma_n \leq \Theta \leq m_n + k\sigma_n \mid \mathbf{x}) \geq P(m_0 - \sigma_0 \leq \Theta \leq m_0 + \sigma_0)$;
   (ii) per quali valori di n si ha $\sigma_n < \frac{1}{5}$, assumendo $\sigma_0 = 3$.

   k ? $\qquad\qquad$ *n ?*

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 15/2/2013.

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero $\int_0^1 \frac{a}{2}dx + \int_1^2 adx + \int_2^3 2adx = \frac{7}{2}a = 1$; pertanto: $a = \frac{2}{7}$. Inoltre, $F(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F(x) = 1$ per $x \geq 3$.
   Per $x \in (0,1]$ si ha: $F(x) = \int_0^x \frac{1}{7}dt = \frac{x}{7}$;
   per $x \in (1,2]$ si ha: $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{7}dt + \int_1^x \frac{2}{7}dt = \frac{1}{7} + \frac{2(x-1)}{7} = \frac{2x-1}{7}$;
   per $x \in (2,3)$ si ha: $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{7}dt + \int_1^2 \frac{2}{7}dt + \int_2^x \frac{4}{7}dt = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4(x-2)}{7} = \frac{4x-5}{7}$. Infine, dalla condizione $\int_{-\infty}^M f(x)dx = F(M) = \frac{1}{2}$, osservando che $F(2) = \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$, segue $M \in (2,3)$; allora $F(M) = \frac{4M-5}{7} = \frac{1}{2}$, da cui segue $M = \frac{17}{8} = 2.125$.

2. Dalla relazione $P(Z = 1) + \cdots + P(Z = n) = 1$, segue $\frac{n}{10} = 1$, quindi $n = 10$. Allora $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{4}{10}$; pertanto $m = \mathbb{P}(X) = P(A) - 2P(B) + P(C) = 0$. Infine, i costituenti relativi ad A, B, C sono: $ABC^c = (Z < 3), AB^cC^c = (3 \leq Z \leq 4)$, $A^cB^cC^c = (5 \leq Z \leq 6)$, $A^cB^cC = (7 \leq Z \leq 8), A^cBC = (Z > 8)$. I costituenti hanno tutti probabilità $\frac{1}{5}$.

3. Si ha
$$\int_0^2 \int_0^2 f(x,y)dxdy = k\int_0^2 [xy + \frac{y^2}{2}]_0^2 dx = k[x^2 + 2x]_0^2 = 8k = 1\,;$$
   pertanto: $k = \frac{1}{8}$. Inoltre
$$f_1(x) = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dy = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\,,\ x \in [0,2]\,;\ \ f_2(y) = \int_0^2 (x+y)dx = \frac{y}{4} + \frac{1}{4}\,,\ y \in [0,2]\,,$$
   con $f_1(x) = f_2(y) = 0$, per $x \notin [0,2]$, $y \notin [0,2]$. Si ha: $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$; quindi X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha
$$P(A_n|H) = P(E_1 \cdots E_n|H) = P(E_{n+1}^c|H) = P(E_1^c|H) = \frac{1}{n+1}\,,\ P(A_n|H^c) = 1\,;$$
   allora: $P(A_n) = \frac{10p}{n+1} + p$, da cui segue: $P(H|A_n) = \frac{\frac{10p}{n+1}}{\frac{10p}{n+1}+p}$; $P(H^c|A_n) = \frac{p}{\frac{10p}{n+1}+p}$; quindi
$$r = \frac{P(H|A_n)}{P(H^c|A_n)} = \frac{P(A_n|H)P(H)}{P(A_n|H^c)P(H^c)} = \frac{\frac{10p}{n+1}}{p} = \frac{10}{n+1} < \frac{1}{10} \iff n > 99\,.$$
   Inoltre: $P(E_1 \cdots E_{n+1}|H) = 0$, $P(E_1 \cdots E_{n+1}|H^c) = 1$; quindi: $P(E_1 \cdots E_{n+1}) = p$. Allora
$$\alpha = P(E_{n+1}|A_n) = \frac{P(E_1 \cdots E_{n+1})}{P(E_1 \cdots E_n)} = \frac{p}{\frac{10p}{n+1} + p} = \frac{n+1}{n+11} > \frac{9}{10} \iff n > 89\,.$$

5. Si ha

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(Y-X)}) = \mathbb{P}(e^{itY})\mathbb{P}(e^{i(-t)X}) = \varphi_Y(t)\varphi_X(-t) = e^{2it-2t^2}e^{-it-\frac{t^2}{2}} = e^{it-\frac{5t^2}{2}}\,;$$

pertanto $Z \sim N_{1,\sqrt{5}}$. Inoltre

$$p = P(Z \geq 1+2\sqrt{5} \mid Z \geq 1+\sqrt{5}) = \frac{P(Z \geq 1+2\sqrt{5},\, Z \geq 1+\sqrt{5})}{P(Z \geq 1+\sqrt{5})} = \frac{P(Z \geq 1+2\sqrt{5})}{P(Z \geq 1+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1-\Phi_{1,\sqrt{5}}(1+2\sqrt{5})}{1-\Phi_{1,\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})} = \frac{1-\Phi(2)}{1-\Phi(1)} \simeq \frac{1-0.9772}{1-0.8413} \simeq 0.1437\,.$$

6. Osservando che $h(x) = 0$ per $x < 1$, si ha

$$S(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt} = e^{-\int_1^x \frac{2}{t}dt} = e^{-2[\log t]_1^x} = e^{\log(\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x^2}\,;$$

allora $f(x) = h(x)S(x) = \frac{2}{x^3}$. Inoltre

$$m = \mathbb{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_1^{+\infty} x\,\frac{2}{x^3}\,dx = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 2\,.$$

7. Si ha $\Theta \,|\, \mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}$; pertanto

$$P(m_n - k\sigma_n \leq \Theta \leq m_n + k\sigma_n \mid \mathbf{x}) = \Phi_{m_n,\sigma_n}(m_n + k\sigma_n) - \Phi_{m_n,\sigma_n}(m_n - k\sigma_n) = 2\Phi(k) - 1\,;$$

inoltre

$$P(m_0 - \sigma_0 \leq \Theta \leq m_0 + \sigma_0) = \Phi_{m_0,\sigma_0}(m_0 + \sigma_0) - \Phi_{m_0,\sigma_0}(m_0 - \sigma_0) = 2\Phi(1) - 1\,.$$

Allora, ricordando che Φ è una funzione crescente, si ha:

$$2\Phi(k) - 1 \geq 2\Phi(1) - 1 \iff \Phi(k) \geq \Phi(1) \iff k \geq 1\,.$$

Infine, osservando che $\frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{9} + n = \frac{1+9n}{9}$, risulta $\sigma_n = \frac{3}{\sqrt{1+9n}} < \frac{1}{5}$ per $n \geq 25$.