Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 8/11/2013)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna, contenente tre palline numerate da 1 a 3, si effettuano due estrazioni con restituzione ottenendo dei risultati aleatori X e Y. Calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X - Y$.

   $\varphi_Z(t) =$

2. Un oggetto Q viene posizionato in un punto aleatorio (X, Y), con X e Y stocasticamente indipendenti e con $X \sim N_{2,2}$, $Y \sim N_{3,3}$. Calcolare: (i) la probabilità α che Q appartenga al rettangolo $R = [0, 4] \times [0, 6]$; (ii) la probabilità condizionata β che Q appartenga al rettangolo $D = [0, 2] \times [0, 3]$, supposto che Q appartenga ad R.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

3. Dati due lotti identici L_1, L_2, ognuno contenente 4 pezzi buoni ed r difettosi, da L_1 si prende a caso un pezzo inserendolo in L_2. Successivamente da L_2 si toglie a caso un pezzo. Considerati gli eventi $H =$ *"il pezzo inserito in* L_2 *è difettoso"*, $E =$ *"il pezzo estratto da* L_2 *è buono"*, determinare: (i) i valori di r tali che $P(H|E) < P(H)$; (ii) i valori di r tali che $P(H|E) < \frac{1}{2}$.

   $r \in$ $\qquad\qquad$ $r \in$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = k(x + y)$, per $(x, y) \in Q = [1, 3] \times [1, 3]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la mediana M del numero aleatorio X; inoltre, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $M =$ $\qquad\qquad$ *stoc. indip.*?

5. Un sistema S è composto da due dispositivi in parallelo funzionanti simultaneamente, di durata aleatoria fino al guasto X e Y, stocasticamente indipendenti, con rispettive funzioni di rischio $h_1(x) = 2$, $\forall x > 0$, e $h_2(y) = 3$, $\forall y > 0$. Calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del tempo aleatorio Z di durata fino al guasto di S.

   $S_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

6. In un gioco un diamante è stato inserito a caso in una tra 6 scatole (ipotesi H), oppure non è stato inserito in nessuna delle scatole. Tizio apre le scatole una dopo l'altra, fermandosi se trova il diamante. Posto $P(H) = p$, sia X il numero aleatorio di scatole aperte da Tizio. Calcolare i valori di p tali che la previsione di X sia maggiore di 4; inoltre, supposto $p = \frac{1}{2}$, calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(X = 3 \,|\, X > 2)$.

   $p \in$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale, di parametri $m_0 = \sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_9)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard σ. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_9)$, con $x_1 + \cdots + x_9 = 9$, siano m_9 e σ_9 la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$. Stabilire per quali valori di σ risulta $\sigma_9 < \frac{1}{5}\sigma$ e calcolare la probabilità $p = P[(1 - \sigma_9 \leq \Theta \leq 1 + \sigma_9)|\mathbf{x}]$.

   $\sigma \in$ $\qquad\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 8/11/2013.

1. Si ha $X \in \{1,2,3\}$, $Y \in \{1,2,3\}$, $Z \in \{-2,-1,0,1,2\}$, con

$$P(X=i) = P(Y=j) = \frac{1}{3}\,,\ P(X=i, Y=j) = \frac{1}{9}\,,\ \forall\, i,j \in \{1,2,3\}\,;$$

$$P(Z=-2) = P(X=1, Y=3) = \frac{1}{9} = P(X=3, Y=1) = P(Z=2)\,,$$

$$P(Z=-1) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=3) = \frac{2}{9} = \cdots = P(Z=1)\,,$$

$$P(Z=0) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) = \frac{3}{9}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_Z(t) = \sum_{h=-2}^{2} p_h e^{ith} = \frac{e^{-2it} + 2e^{-it} + 3 + 2e^{it} + e^{2it}}{9}\,.$$

2. Si ha: $\alpha = P(Q \in R) = P(0 \le X \le 4, 0 \le Y \le 6) = P(0 \le X \le 4)P(0 \le Y \le 6) =$

$$= [\Phi_{2,2}(4) - \Phi_{2,2}(0)][\Phi_{3,3}(6) - \Phi_{3,3}(0)] = [\Phi(\frac{4-2}{2}) - \Phi(\frac{0-2}{2})][\Phi(\frac{6-3}{3}) - \Phi(\frac{0-3}{3})] =$$

$$= [\Phi(1) - \Phi(-1)][\Phi(1) - \Phi(-1)] = [2\Phi(1) - 1]^2 \simeq 0.6826^2 \simeq 0.4659\,.$$

Inoltre, osservando che l'evento $Q \in D$ implica l'evento $Q \in R$ e che $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, segue

$$\beta = P(Q \in D \,|\, Q \in R) = \frac{P(Q \in D, Q \in R)}{P(Q \in R)} = \frac{P(Q \in D)}{P(Q \in R)}\,,$$

con $P(Q \in D) = P(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 3) = P(0 \le X \le 2)P(0 \le Y \le 3) =$

$$= [\Phi_{2,2}(2) - \Phi_{2,2}(0)][\Phi_{3,3}(3) - \Phi_{3,3}(0)] = [\Phi(\frac{2-2}{2}) - \Phi(\frac{0-2}{2})][\Phi(\frac{3-3}{3}) - \Phi(\frac{0-3}{3})] =$$

$$= [\Phi(0) - \Phi(-1)][\Phi(0) - \Phi(-1)] = [\Phi(1) - \frac{1}{2}]^2 \simeq 0.3413^2 \simeq 0.1165\,.$$

Pertanto: $\beta \simeq 0.2501$.

3. Si ha: $P(H) = \frac{r}{r+4}\,,\ \ P(H^c) = \frac{4}{r+4}\,,\ \ P(E|H) = \frac{4}{r+5}\,,\ \ P(E|H^c) = \frac{5}{r+5}$. Allora

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{\frac{r}{r+4}\cdot\frac{4}{r+5}}{\frac{r}{r+4}\cdot\frac{4}{r+5} + \frac{4}{r+4}\cdot\frac{5}{r+5}} = \frac{r}{r+5} \ < \ \frac{r}{r+4}\,,\ \forall\, r > 0\,;$$

ovvero $P(H|E) < P(H)$, per ogni intero $r \in \{1,2,\ldots\}$. Inoltre: $P(H|E) < \frac{1}{2}$, per $r < 5$.

4. Si ha: $k\int_1^3 dx \int_1^3 (x+y)dy = \cdots = k\int_1^3 (2x+4)dx = \cdots = 16k = 1$; pertanto: $k = \frac{1}{16}$. Inoltre: $f_1(x) = \frac{1}{16}\int_1^3 (x+y)dy = \cdots = \frac{x+2}{8}$, $1 \le x \le 3$, con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora
$$\int_1^M \frac{x+2}{8}\, dx = \frac{M^2+4M-5}{16} = \frac{1}{2}\,, \quad 1 < M < 3\,;$$
ovvero: $M^2 + 4M - 13 = 0\,,\ 1 < M < 3$, da cui segue: $M = \sqrt{17} - 2 \simeq 2.1231$. Infine
$$f_2(y) = \frac{1}{16}\int_1^3 (x+y)dx = \cdots = \frac{y+2}{8}\,,\ 1 \le y \le 3\,,$$
con $f_2(y) = 0$ altrove. Osservando che $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$, segue che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

5. Si ha
$$f_1(x) = h_1(x)e^{-\int_0^x h_1(t)dt} = \cdots = 2e^{-2x}\,,\ x \ge 0\,; \qquad f_2(y) = \cdots = 3e^{-3y}\,,\ y \ge 0\,;$$
ovvero: $X \sim Exp(2)$, $Y \sim Exp(3)$. Essendo $Z = max\{X,Y\}$, per ogni $z \ge 0$ si ha
$$S_Z(z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \le z) = 1 - P(X \le z, Y \le z) = 1 - P(X \le z)P(Y \le z) =$$
$$= 1 - (1 - e^{-2z})(1 - e^{-3z} = e^{-2z} + e^{-3z} - e^{-5z}\,.$$
Pertanto: $f_Z(z) = -S'_Z(z) = 2e^{-2z} + 3e^{-3z} - 5e^{-5z}$ (*combinazione lineare di tre distribuzioni esponenziali*). Allora
$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{2e^{-2z} + 3e^{-3z} - 5e^{-5z}}{e^{-2z} + e^{-3z} - e^{-5z}} = \frac{2e^{3z} + 3e^{2z} - 5}{e^{3z} + e^{2z} - 1}\,, \quad z \ge 0\,.$$

6. Si ha $X \in \{1, \ldots, 6\}$, con
$$P(X = h \,|\, H) = \frac{1}{6}\,,\ h = 1, \ldots, 6\,;\ P(X = h \,|\, H^c) = 0\,,\ h = 1, \ldots, 5\,;\ P(X = 6 \,|\, H^c) = 1\,.$$
Allora
$$P(X = h) = P(H)P(X = h \,|\, H) = \frac{1}{6}\,p\,,\ h = 1, \ldots, 5\,;\ \ P(X = 6) = 1 - \frac{5}{6}\,p\,.$$
$$\mathbb{P}(X) = \frac{1}{6}\,p + \frac{2}{6}\,p + \cdots + \frac{5}{6}\,p + 6 - 5p = 6 - \frac{5}{2}\,p \ > \ 4 \iff \ p \ < \ \frac{4}{5}\,.$$
Inoltre, per $p = \frac{1}{2}$, si ha
$$P(X = h) = \frac{1}{2}P(X = h \,|\, H) = \frac{1}{12}\,,\ h = 1, \ldots, 5\,;\ \ P(X = 6) = 1 - \frac{7}{12}\,;$$
pertanto
$$\alpha = P(X = 3 \,|\, X > 2) = \frac{P(X = 3, X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X = 3)}{1 - P(X \le 2)} = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{2}{12}} = \frac{1}{10}\,.$$

7. Si ha: $\Theta|\mathbf{x} \ \sim \ N_{m_9,\sigma_9}$, con $m_9 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{9}{\sigma^2}\cdot \bar{\mathbf{x}}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{9}{\sigma^2}} = 1\,,\qquad \frac{1}{\sigma_9^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{9}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2+9}{\sigma^2}$; pertanto $\sigma_9 = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+9}} < \frac{1}{5}\sigma \iff \sigma > 4$. Inoltre

$p = P[(1 - \sigma_9 \le \Theta \le 1 + \sigma_9)|\mathbf{x}] = \Phi_{1,\sigma_9}(1 + \sigma_9) - \Phi_{1,\sigma_9}(1 - \sigma_9) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$
$= 2\Phi(1) - 1 \ \simeq \ 0.6826.$