Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 11/6/2014)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna contenente 3 palline nere e 3 bianche si effettuano 2 estrazioni sequenziali. Ad ogni estrazione, se la pallina estratta è nera si inseriscono nell'urna la pallina estratta più 1 pallina bianca; se invece è bianca, si inseriscono la pallina estratta più 1 pallina nera. Indicando con E_i l'evento "la i-esima pallina estratta è bianca", $i = 1, 2$, verificare se: (i) $P(E_1) = P(E_2)$; (ii) $P(E_1|E_1 \vee E_2) = P(E_2|E_1 \vee E_2)$.

   (i) *SI* *NO* (ii) *SI* *NO*

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y), con $X \geq 0, Y \geq 0$, è $f(x, y) = xye^{-x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $y > 0$, la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di Y.

   $S_2(y) =$ $h_2(y) =$

3. Il tempo aleatorio X impiegato da una persona per completare un lavoro ha una densità $f(x) = (ax^2 + x)$, per $x \in [0, 1]$ e zero altrove. Calcolare il valore della costante a, la funzione di ripartizione $F(x)$ e la varianza di X.

   $a =$ $F(x) =$ $Var(X) =$

4. Da un'urna, contenente 6 palline numerate da 1 a 6, Tizio e Caio effettuano ciascuno 4 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"Tizio ottiene sempre un numero pari oppure sempre un numero dispari"*, $B =$ *"Caio ottiene sempre un numero inferiore a 4 oppure sempre superiore a 3"*, calcolare $P(A|A \vee B)$, $P(B|A \vee B)$ e $P(AB|A \vee B)$.

   $P(A|A \vee B) =$ $P(B|A \vee B) =$ $P(AB|A \vee B) =$

5. La funzione caratteristica di 3 numeri aleatori X_1, X_2, X_3, ugualmente distribuiti e stocasticamente indipendenti, è $\varphi(t) = e^{it-3t^2}$. Indicando con Z la media aritmetica di X_1, X_2, X_3, calcolare la funzione caratteristica di Z; inoltre, utilizzando la funzione caratteristica, calcolare la previsione m e la varianza σ^2 di Z.

   $\varphi_Z(t) =$ $m =$ $\sigma^2 =$

6. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(0, 2), (2, 0), (2, 2)$. Calcolare le densità marginali $f_1(x)$, per $x \in [0, 2]$, ed $f_2(y)$, per $y \in [0, 2]$; inoltre, calcolare la densità di probabilità $g(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$, per $z \in [2, 4]$.

   $f_1(x) =$ $f_2(y) =$ $g(z) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 3$, $\sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_4)$, con $x_1 + \cdots + x_4 = 12$, calcolare il valore a tale che $P(3 - 2a \leq \Theta \leq 3 + 2a \mid \mathbf{x}) = 2\Phi(2) - 1$.

   $a =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 11/6/2014.

1. Si ha

$$P(E_1) = \frac{1}{2}\,, \quad P(E_2|E_1) = \frac{3}{6+1} = \frac{3}{7}\,, \quad P(E_2^c|E_1) = \frac{4}{7}\,, \quad P(E_2|E_1^c) = \frac{3+1}{6+1} = \frac{4}{7}\,, \quad P(E_2^c|E_1^c) = \frac{3}{7}\,.$$

Pertanto: $P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P(E_1)$; inoltre, tenendo conto che $P(E_1 \vee E_2) = 1 - P(E_1^c E_2^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c) = \frac{11}{14}$, segue

$$P(E_1|E_1 \vee E_2) = \frac{P(E_1)}{P(E_1 \vee E_2)} = \frac{P(E_2)}{P(E_1 \vee E_2)} = P(E_2|E_1 \vee E_2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{11}{14}} = \frac{7}{11}\,.$$

2. Per ogni $y > 0$, osservando che $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \Gamma(2) = 1$, si ha

$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} xye^{-x-y}dx = ye^{-y}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = ye^{-y}\,;$$

ovvero, Y ha una distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = 1$. Allora

$$S_2(y) = P(Y > y) = \int_y^{+\infty} f_2(t)dt = \int_y^{+\infty} te^{-t}dt = [-te^{-t}]_y^{+\infty} + \int_y^{+\infty} e^{-t}dt = ye^{-y} + e^{-y}\,.$$

Pertanto

$$h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{ye^{-y}}{ye^{-y} + e^{-y}} = \frac{y}{y+1}\,,\ y > 0\,.$$

3. Si ha

$$\int_0^1 (ax^2 + x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{1}{2} = 1\,;$$

pertanto: $a = \frac{3}{2}$. Allora, per ogni $x \in (0,1)$, si ha: $F(x) = \int_0^x (\frac{3}{2}t^2 + t)dt = \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2$; inoltre: $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = 1$, per $x \geq 1$. Infine

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (\frac{3}{2}x^3 + x^2)dx = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{24}\,;$$

$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 (\frac{3}{2}x^4 + x^3)dx = \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{20}\,;$$

pertanto: $Var(X) = \frac{11}{20} - \frac{289}{576} = \frac{139}{2880}$.

4. Si ha: $P(A) = (\frac{3}{6})^4 + (\frac{3}{6})^4 = \frac{1}{8} = P(B)$; inoltre A e B sono stocasticamente indipendenti. Allora, osservando che $P(A) = P(B)$, si ottiene

$$P(A|A \vee B) = \frac{P(A)}{P(A \vee B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)} = \frac{1}{2 - P(A)} = \frac{8}{15} = P(B|A \vee B)\,.$$

Infine

$$P(AB|A \vee B) = \frac{P(AB)}{P(A \vee B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)} = \frac{P(A)}{2 - P(A)} = \frac{1}{15}\,.$$

5. Essendo X_1, X_2, X_3 stocasticamente indipendenti, posto $Y = X_1 + X_2 + X_3$, si ha: $\varphi_Y(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot \varphi_{X_3}(t) = e^{3it-9t^2}$, ed essendo $Z = \frac{Y}{3}$ segue

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it\frac{Y}{3}}) = \mathbb{P}(e^{i\frac{t}{3}Y}) = \varphi_Y\left(\frac{t}{3}\right) = e^{it-t^2} .$$

Inoltre, ricordando la relazione $\mathbb{P}(Z^k) = m^{(k)} = \frac{\varphi_Z^{(k)}(0)}{i^k}$ e osservando che

$$\varphi'_Z(t) = (i-2t)e^{it-t^2} , \quad \varphi''_Z(t) = (i-2t)^2 e^{it-t^2} - 2e^{it-t^2} ,$$

si ottiene $\varphi'_Z(0) = i$; $\varphi''_Z(0) = i^2 - 2 = -3$, da cui segue: $m = \mathbb{P}(X) = 1$, $\mathbb{P}(X^2) = 3$; infine: $\sigma^2 = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = 2$. (*Nota:* $X_1 \sim N_{1,\sqrt{6}}$, $X_2 \sim N_{1,\sqrt{6}}$, $X_3 \sim N_{1,\sqrt{6}}$, $Z \sim N_{1,\sqrt{2}}$)

6. L'area di T è $\mu(T) = 2$; pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{2}$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. La retta passante per i punti $(2,0), (0,2)$ ha equazione: $x + y = 2$; allora

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{2-x}^{2} \frac{1}{2}\,dy = \frac{x}{2} , \ x \in [0,2] ,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; analogamente $f_2(y) = \int_{2-y}^{2} \frac{1}{2}dx = \frac{y}{2}$, $y \in [0,2]$, con $f_2(y) = 0$ altrove; ovvero, X e Y sono ugualmente distribuiti. Inoltre $Z \in [2,4]$ e indicando con T_z il triangolo di vertici $(z-2,2), (2,z-2), (2,2)$, con $z \in [2,4]$, si ha $\mu(T_z) = \frac{(4-z)^2}{2}$ e, tenendo conto che la distribuzione è uniforme, segue

$$P(Z > z) = P(X + Y > z) = P[(X,Y) \in T_z] = \int\int_{T_z} \frac{1}{2} dxdy = \frac{\mu(T_z)}{\mu(T)} = \frac{(4-z)^2}{4} ;$$

pertanto: $G(z) = P(Z \leq z) = 1 - \frac{(4-z)^2}{4}$, per $z \in [2,4]$, con $G(z) = 0$, per $z < 2$, e con $G(z) = 1$, per $z > 4$. Allora, $g(z) = G'(z) = \frac{4-z}{2}$, per $z \in [2,4]$, con $g(z) = 0$ altrove.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_4,\sigma_4}$, con $m_4 = 3$ essendo $\overline{x} = m_0 = 3$. Inoltre: $\frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma^2} = 1 + \frac{4}{\frac{1}{6}} = 25$, e quindi $\sigma_4 = \frac{1}{5}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{3,\frac{1}{5}}$. Allora, (ricordando che Φ è una funzione crescente) si ha

$$P\left(3 - 2a \leq \Theta \leq 3 + 2a \mid \mathbf{x}\right) = \Phi_{3,\frac{1}{5}}(3+2a) - \Phi_{3,\frac{1}{5}}(3-2a) = \Phi\left(\frac{3+2a-3}{\frac{1}{5}}\right) - \Phi\left(\frac{3-2a-3}{\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= \Phi(10a) - \Phi(-10a) = 2\Phi(10a) - 1 \ = \ 2\Phi(2) - 1 \iff \Phi(10a) = \Phi(2) \iff a = \sigma_4 = \tfrac{1}{5}.$$