Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 11/7/2014)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Data un'urna contenente 2 palline bianche e 2 nere, Tizio effettua un numero aleatorio X di estrazioni senza restituzione fino ad ottenere per la prima volta pallina bianca; Caio ripete l'esperimento effettuando un numero aleatorio Y di estrazioni senza restituzione. Calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $(X = 2)|(X + Y = 3)$ e la varianza di $X - Y$. (*utilizzare gli eventi E_i = "nell'i-ma estrazione Tizio estrae pallina bianca"* $i = 1, 2, 3$.)

   $\gamma =$ $\qquad\qquad$ $Var(X - Y) =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica $\varphi_Z(t)$ del n. a. $Z = |E_1| + |E_2| + |E_3|$. Inoltre, utilizzando $\varphi_Z(t)$, calcolare la varianza di Z.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $Var(Z) =$

3. Il tempo aleatorio X, impiegato in un percorso, ha una densità $f(x) = 0$, per $x < 2$, $f(x) = ax$, per $x \in [2, 3]$ ed $f(x) = \frac{9}{x^3}$, per $x > 3$; calcolare la costante a. Inoltre, indicando con m la previsione di X, stabilire se $P(X > m) < P(X \leq m)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $P(X > m) < P(X \leq m)$?

4. Dati 3 eventi E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{3}$, $P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = \frac{1}{15}$, $E_1E_2E_3 = \emptyset$, calcolare la probabilità p dell'evento $E_1^cE_2 \vee E_1E_2^cE_3$. Inoltre, calcolare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |E_1E_2| + |E_1E_3|$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{18\pi}e^{-\frac{(x-2)^2+(y-1)^2}{18}}$, per ogni (x, y). Calcolare la varianza del numero aleatorio $2X - Y$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(2 \leq X \leq 5, -2 \leq Y \leq 1)|(-1 \leq X \leq 5, -2 \leq Y \leq 4)$.

   $Var(2X - Y) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

6. Due veicoli partono nello stesso istante per spostarsi da una località A ad una località B, impiegando dei tempi aleatori X, Y. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = 3e^{-x-3y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di rischio $h(z)$ e la previsione μ del tempo aleatorio Z impiegato dal veicolo che arriva per primo in B; inoltre, calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(Z \leq 3 \,|\, Z > 1)$.

   $h(z) =$ $\qquad\qquad$ $\mu =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

7. Dati 3 eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1^c) = \frac{2}{5}$, $P(E_1^cE_2^c) = \frac{1}{10}$, $P(E_1^cE_2^cE_3^c) = 0$, calcolare $\alpha = P(E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c \,|\, E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c \vee E_1^cE_3^c)$ e $\beta = P(E_1E_2 \,|\, E_1E_2 \vee E_2E_3)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 11/7/2014.

1. I numeri aleatori X e Y sono stocasticamente indipendenti e ugualmente distribuiti, con $X \in \{1,2,3\}, Y \in \{1,2,3\}$, e con $P(X=1) = P(Y=1) = P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(X=2) = = P(Y=2) = P(E_1^c E_2) = = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $P(X=3) = P(Y=3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Allora
$$\gamma = P(X=2)|(X+Y=3) = \frac{P(X=2, X+Y=3)}{P(X+Y=3)} = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(X=1,Y=2) + P(X=2,Y=1)} =$$
$$= \frac{P(X=2)P(Y=1)}{P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$
Inoltre: $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$, $\mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$, $Var(X) = Var(Y) = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$; pertanto: $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{10}{9}$.

2. Si ha $Z \sim H(4, 3, \frac{1}{2})$, $Z \in \{1,2\}$, con
$$P(Z=1) = P(E_1 E_2^c E_3^c \vee E_1^c E_2 E_3^c \vee E_1^c E_2^c E_3) = P(E_1 E_2^c E_3^c) + P(E_1^c E_2 E_3^c) + P(E_1^c E_2^c E_3) =$$
$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2} = P(E_4), \quad P(Z=2) = 1 - P(Z=1) = \frac{1}{2}.$$
In alternativa: $P(Z=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2} = P(Z=2)$. Allora, posto $P(Z=h) = p_h$, si ha: $\varphi_Z(t) = \sum_{h=1}^{2} p_h e^{ith} = \frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{2it}$. Inoltre
$$\varphi'_Z(t) = \frac{1}{2} i e^{it} + i e^{2it}, \quad \varphi'_Z(0) = \frac{3}{2} i; \quad \varphi''_Z(t) = \frac{1}{2} i^2 e^{it} + 2 i^2 e^{2it} = -\frac{1}{2} e^{it} - 2 e^{2it}, \quad \varphi''_Z(0) = -\frac{5}{2}.$$
Pertanto: $\mathbb{P}(Z) = \frac{\varphi'_Z(0)}{i} = \frac{3}{2}$, $\mathbb{P}(Z^2) = \frac{\varphi''_Z(0)}{i^2} = \frac{5}{2}$, $Var(Z) = \mathbb{P}(Z^2) - [\mathbb{P}(Z)]^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$.

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_2^3 ax\,dx + \int_3^{+\infty} \frac{9}{x^3}\,dx = \left[a \frac{x^2}{2}\right]_2^3 + \left[-\frac{9}{2x^2}\right]_3^{+\infty} = \frac{5}{2} a + \frac{1}{2} = 1$, pertanto: $a = \frac{1}{5}$. Allora
$$m = \mathbb{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{5} \int_2^3 x^2 dx + \int_3^{+\infty} \frac{9}{x^2}\,dx = \left[\frac{x^3}{15}\right]_2^3 + \left[-\frac{9}{x}\right]_3^{+\infty} = \frac{19}{15} + 3 = \frac{64}{15};$$
quindi: $P(X > m) = P(X > \frac{64}{15}) = \int_{\frac{64}{15}}^{+\infty} \frac{9}{x^3}\,dx = \left[-\frac{9}{2x^2}\right]_{\frac{64}{15}}^{+\infty} = \frac{2025}{8192} \simeq 0.2472$, con $P(X \leq m) = 1 - P(X > m) \simeq 0.7528$. Pertanto: $P(X > m) < P(X \leq m)$.

4. Si ha $p = P(E_1^c E_2 \vee E_1 E_2^c E_3) = P(E_1^c E_2) + P(E_1 E_2^c E_3)$, con
$$P(E_1^c E_2) = P(E_2) - P(E_1 E_2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{4}{15}, \quad P(E_1 E_2^c E_3) = P(E_1 E_3) - P(E_1 E_2 E_3) = \frac{1}{15};$$
pertanto: $p = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$. Inoltre $X \in \{0,1\}$, con
$$P(X=1) = P(E_1 E_2 \vee E_1 E_3) = P(E_1 E_2) + P(E_1 E_3) = \frac{2}{15}, \quad P(X=0) = 1 - P(X=1) = \frac{13}{15}.$$
Allora: $F(x) = 0$, per $x < 0$; $F(x) = \frac{13}{15}$, per $0 \leq x < 1$; $F(x) = 1$, per $x \geq 1$.

5. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{18\pi} e^{-\frac{(x-2)^2+(y-1)^2}{18}} dy = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{18}} dy = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}} ;$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{18\pi} e^{-\frac{(x-2)^2+(y-1)^2}{18}} dx = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{18}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}} dx = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{18}} ;$$

pertanto: $X \sim N_{2,3}$, $Y \sim N_{1,3}$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$; ovvero X e Y sono stocasticamente indipendenti. Allora: $V(2X - Y) = 4Var(X) + Var(Y) = 36 + 9 = 45$. Inoltre, osservando che

$$(2 \le X \le 5, -2 \le Y \le 1) \wedge (-1 \le X \le 5, -2 \le Y \le 4) \;=\; (2 \le X \le 5, -2 \le Y \le 1)\,,$$

segue

$$p = P[(2 \le X \le 5, -2 \le Y \le 1)|(-1 \le X \le 5, -2 \le Y \le 4)] = \frac{P(2 \le X \le 5, -2 \le Y \le 1)}{P(-1 \le X \le 5, -2 \le Y \le 4)} =$$

$$= \frac{P(2 \le X \le 5)P(-2 \le Y \le 1)}{P(-1 \le X \le 5)P(-2 \le Y \le 4)} = \frac{[\Phi_{2,3}(5) - \Phi_{2,3}(2)][\Phi_{1,3}(1) - \Phi_{1,3}(-2)]}{[\Phi_{2,3}(5) - \Phi_{2,3}(-1)][\Phi_{1,3}(4) - \Phi_{1,3}(-2)]} =$$

$$= \frac{[\Phi(1) - \Phi(0)][\Phi(0) - \Phi(-1)]}{[\Phi(1) - \Phi(-1)][\Phi(1) - \Phi(-1)]} = \frac{[\Phi(1) - \Phi(0)]^2}{[\Phi(1) - \Phi(-1)]^2} = \frac{[\Phi(1) - \Phi(0)]^2}{(2[\Phi(1) - \Phi(0)])^2} = \frac{1}{4}\,.$$

6. Si ha $Z = min\,\{X, Y\}$ e, per ogni fissato $z > 0$, risulta

$$S(z) = P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = \int_z^{+\infty}\int_z^{+\infty} 3e^{-x-3y} dxdy = \int_z^{+\infty} e^{-x} dx \int_z^{+\infty} 3e^{-3y} dy =$$

$= e^{-z}e^{-3z} = e^{-4z}$; $\quad f(z) = -S'(z) = 4e^{-4z}$ (distribuzione esponenziale di parametro 4). Pertanto: $h(z) = \frac{f(z)}{S(z)} = \frac{4e^{-4z}}{e^{-4z}} = 4$. Inoltre: $\mu = \int_0^{+\infty} zf(z)dz = \int_0^{+\infty} 4ze^{-4z}dz = \frac{1}{4}$. Infine

$$\alpha = \frac{P(1 < Z \le 3)}{P(Z > 1)} = \frac{P(Z > 1) - P(Z > 3)}{P(Z > 1)} = \frac{e^{-4} - e^{-12}}{e^{-4}} = 1 - e^{-8} = P(Z \le 2)\,.$$

7. Osservando che $(E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c) \wedge (E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c \vee E_1^cE_3^c) = E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c$, con

$$P(E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c) = P(E_1^cE_2^c) + P(E_2^cE_3^c) - P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - 0 = \frac{1}{5}\,,$$

$$P(E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c \vee E_1^cE_3^c) = P(E_1^cE_2^c) + P(E_2^cE_3^c) + P(E_1^cE_3^c) - 3P(E_1^cE_2^cE_3^c) + P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \frac{3}{10}\,,$$

si ha $\alpha = \frac{P(E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c)}{P(E_1^cE_2^c \vee E_2^cE_3^c \vee E_1^cE_3^c)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$. Inoltre, si ha: $(E_1E_2) \wedge (E_1E_2 \vee E_2E_3) = E_1E_2$, con $P(E_1E_2) = 1 - P(E_1^c \vee E_2^c) = 1 - (\frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}) = \frac{3}{10}$; infine, si ha: $P(E_1E_2 \vee E_2E_3) = P(E_1E_2) + P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - [1 - P(E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c)] = -\frac{2}{5} + (3\cdot\frac{2}{5} - 3\cdot\frac{1}{10} + 0) = \frac{1}{2}$. Pertanto: $\beta = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1E_2 \vee E_2E_3)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$.