Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 12/2/2014)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. In un gioco viene lanciata 2 volte una moneta; ad ogni lancio Tizio riceve 1 euro se esce Testa, mentre paga 1 euro se esce Croce. Sia E_i l'evento "esce Testa all'i-esimo lancio", $i = 1, 2$, e G il guadagno aleatorio di Tizio a fine gioco. Calcolare: (i) $P(G = h)$, per ogni valore possibile h di G; (ii) $Var(G)$; (iii) la funzione di ripartizione di G.

   $P(G = h) =$ $\qquad$ $Var(G) =$ $\qquad$ $F(x) =$

2. Un vettore aleatorio (X, Y) ha una distribuzione uniforme nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Calcolare: $P(X + Y > 1/2)$, $P(\max\{X, Y\} \leq 1/2)$, $P(\min\{X, Y\} \leq 1/2)$.

   $P(X+Y > 1/2) =$ $\qquad$ $P(\max\{X, Y\} \leq 1/2) =$ $\qquad$ $P(\min\{X, Y\} \leq 1/2) =$

3. Da un'urna, contenente cinque palline, di cui due numerate con il numero 0, una con il numero 1 e due con il numero 2, si effettuano due estrazioni senza restituzione. Indicando con X il risultato della prima estrazione e con Y il risultato della seconda estrazione, sia $Z = X + Y$. Calcolare la probabilità α dell'evento $(Z \leq 1)$ e la probabilità β dell'evento condizionato $(X = 0 \,|\, Z \leq 1)$.

   $P(Z \leq 1) =$ $\qquad$ $P(X = 0 \,|\, Z \leq 1) =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-x-y}$ per $x \geq 0$, $y \geq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la funzione di rischio di $Z = Y - X$.

   $a =$ $\qquad$ $h_Z(z) =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti e calcolare il coefficiente di correlazione di X, Y.

   Indip. stocastica ? $\qquad$ $\rho =$

6. Siano dati due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard. Posto $Z = 3X - 2Y$, calcolare la funzione caratteristica di Z e la covarianza della coppia $(Z, X - Y)$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad$ $Cov(Z, X - Y) =$

7. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 4 nere si tolgono a caso 3 palline senza osservarle; successivamente, dall'urna si effettuano tre estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $H_r =$ *"le palline bianche rimaste nell'urna sono r"*, $r = 0, 1, 2$; $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare la probabilità di $H_1 | E_1E_2$ e la probabilità di $E_3 | E_1E_2$.

   $P(H_1 \,|\, E_1E_2) =$ $\qquad$ $P(E_3 \,|\, E_1E_2) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 12/2/2014.

1. Si ha $G \in \{-2, 0, 2\}$, con $P(G = -2) = P(E_1^c)P(E_2^c) = \frac{1}{4} = P(E_1)P(E_2) = P(G = 2)$, $P(G = 0) = 1 - P(G = -2) - P(G = 2) = \frac{1}{2}$. Inoltre
$$\mathbb{P}(G) = -2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0\,,\; Var(G) = \mathbb{P}(G^2) = 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2\,.$$
Infine: $F(x) = 0$ per $x < -2$; $F(x) = \frac{1}{4}$, per $-2 \leq x < 0$; $F(x) = \frac{3}{4}$, per $0 \leq x < 2$; $F(x) = 1$, per $x \geq 2$.

2. Si ha $f(x, y) = 1$, per $(x, y) \in [0, 1]^2$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Si può verificare che X, Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Allora, essendo la distribuzione uniforme, si può ragionare in termini di rapporti di aree e si ottiene: $P(X + Y > \frac{1}{2}) = 1 - P(X + Y \leq \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; inoltre:
$$P(\max\{X, Y\} \leq \frac{1}{2}) = P[(X \leq \frac{1}{2}) \wedge (Y \leq \frac{1}{2})] = P(X \leq \frac{1}{2})P(Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\,;$$
$$P(\min\{X, Y\} \leq \frac{1}{2}) = P[(X \leq \frac{1}{2}) \vee (Y \leq \frac{1}{2})] = 1 - P[(X > \frac{1}{2}) \wedge (Y > \frac{1}{2})] = \frac{3}{4}\,.$$

3. Si ha $(Z \leq 1) = (Z = 0) \vee (Z = 1)$, con
$$P(Z = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0 \,|\, X = 0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}\,;$$
$$P(Z = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) =$$
$$= P(X = 0)P(Y = 1 \,|\, X = 0) + P(X = 1)P(Y = 0 \,|\, X = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}\,.$$
Pertanto: $\alpha = \frac{3}{10}$. Inoltre, osservando che: $(X = 0) \wedge (Z \leq 1) =$
$$= (X = 0) \wedge [(X = 0, Y = 0) \vee (X = 0, Y = 1) \vee (X = 1, Y = 0)] = (X = 0, Y = 0) \vee (X = 0, Y = 1)\,,$$
segue
$$\beta = P(X = 0 \,|\, Z \leq 1) = \frac{P[(X = 0, Y = 0) \vee (X = 0, Y = 1)]}{P[(X = 0, Y = 0) \vee (X = 0, Y = 1) \vee (X = 1, Y = 0)]} =$$
$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4}} = \frac{2}{3}\,.$$

4. Si ha
$$\int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} a e^{-x-y} dy = a \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{a}{2} \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx = \frac{a}{2} = 1\,;$$
pertanto $a = 2$. Inoltre, $Z = Y - X \geq 0$ e per ogni fissato $z > 0$ si ha
$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(Y > X + z) = \int_0^{+\infty} dx \int_{x+z}^{+\infty} 2e^{-x-y} dy = e^{-z} \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx = e^{-z}\,;$$
allora: $h_Z(z) = -\frac{S_Z'(z)}{S_Z(z)} = -\frac{-e^{-z}}{e^{-z}} = 1$.

5. Si ha

$$f_1(x)=\int_x^{+\infty}2e^{-x-y}dy=2e^{-2x}\,,\ x\geq 0\,;\quad f_2(y)=\int_0^{y}2e^{-x-y}dx=2e^{-y}-2e^{-2y}\,,\ y\geq 0\,;$$

pertanto $f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$; quindi X e Y non sono indipendenti. Inoltre

$$\mathbb{P}(X)=\sigma_X=\frac{1}{2}\,;\quad \mathbb{P}(Y)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,;\quad \mathbb{P}(Y^2)=\cdots=\frac{7}{2}\,,\quad \sigma_Y=\frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Infine, $\mathbb{P}(XY)=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}\left(\int_x^{+\infty}ye^{-y}dy\right)dx$, con $\int_x^{+\infty}ye^{-y}dy=\cdots=xe^{-x}+e^{-x}$; pertanto

$$\mathbb{P}(XY)=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}(xe^{-x}+e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}2x^2e^{-2x}dx+\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\,.$$

Allora: $\rho=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

6. Si ha: $\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$, allora

$$\varphi_{3X}(t)=\mathbb{P}(e^{it(3X)})=\mathbb{P}(e^{i(3t)X})=\varphi_X(3t)=e^{-\frac{(3t)^2}{2}}=e^{-\frac{9t^2}{2}}\,;\quad \varphi_{-2Y}(t)=e^{-\frac{(-2t)^2}{2}}=e^{-2t^2}\,.$$

Pertanto, essendo $Z=(3X)+(-2Y)$, segue

$$\varphi_Z(t)=\varphi_{3X}(t)\varphi_{-2Y}(t)=e^{-\frac{9t^2}{2}}e^{-2t^2}=e^{-\frac{13t^2}{2}}\,.$$

Inoltre, osservando che $Cov(X,Y)=0$, si ha

$$Cov(Z,X-Y)=Cov(3X-2Y,X-Y)=3Cov(X,X)+2Cov(Y,Y)=3Var(X)+2Var(Y)=5\,.$$

7. Si ha

$$P(H_0)=\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{5}\,,\quad P(H_1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{3}{5}\,,\quad P(H_2)=\frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{5}\,;$$

$$P(E_1E_2\,|\,H_0)=0\,,\quad P(E_1E_2\,|\,H_1)=\frac{1}{9}\,,\quad P(E_1E_2\,|\,H_2)=\frac{4}{9}\,;$$

allora: $P(E_1E_2)=\sum_r P(E_1E_2|H_r)P(H_r)=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{5}=\frac{7}{45}$, da cui segue

$$P(H_1\,|\,E_1E_2)=\frac{P(E_1E_2\,|\,H_1)P(H_1)}{P(E_1E_2)}=\frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{7}{45}}=\frac{3}{7}\,.$$

Inoltre

$$P(E_1E_2E_3\,|\,H_0)=0\,,\quad P(E_1E_2E_3\,|\,H_1)=\frac{1}{27}\,,\quad P(E_1E_2E_3\,|\,H_2)=\frac{8}{27}\,;$$

pertanto

$$P(E_1E_2E_3)=\sum_r P(E_1E_2E_3|H_r)P(H_r)=\frac{1}{27}\cdot\frac{3}{5}+\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{5}=\frac{11}{135}\,,$$

da cui segue: $P(E_3\,|\,E_1E_2)=\frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)}=\frac{\frac{11}{135}}{\frac{7}{45}}=\frac{11}{21}$.