**Probabilità e Statistica** (*Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 12/9/2014)
*(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)*

1. Date due urne $U$, contenente 3 palline bianche e 1 nera, e $V$, contenente 1 pallina nera, da $U$ si prendono a caso 2 palline che vengono inserite in $V$. Successivamente, da $V$ si prende a caso 1 pallina che viene inserita in $U$. Sia $H_r$ l'evento *"al termine dell'esperimento $V$ contiene $r$ palline bianche"*. Determinare i possibili valori di $r$ e le corrispondenti probabilità $P(H_r)$. (*indicare con $X$ il numero aleatorio di palline bianche inserite in $V$ e con $E$ l'evento "la pallina estratta da $V$ e inserita in $U$ è bianca"*)

   $r :$ $\qquad\qquad$ $P(H_r) :$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, sia $Y$ il numero aleatorio di palline bianche in $U$ al termine dell'esperimento. Calcolare la previsione di $Y$ e la probabilità $\gamma$ dell'evento condizionato $(X = 2)|(X + Y = 4)$.

   $\mathbb{P}(Y) =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

3. La densità di un numero aleatorio continuo $X$ è $f(x) = a$, per $x \in [-3, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, 3]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante $a$ e la funzione di ripartizione $F(x)$. Inoltre, indicando con $m$ la previsione di $X$, stabilire se $P(X > m) = P(X \leq m)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $P(X > m) = P(X \leq m)$ ?

4. In una data attività il ricavo e le spese sono due numeri aleatori stocasticamente indipendenti $X, Y$, con funzioni caratteristiche $\varphi_X(t) = e^{2it-2t^2}$, $\varphi_Y(t) = e^{it-t^2}$. Indicando con $Z$ il guadagno aleatorio $X - Y$, calcolare la previsione $m_Z$, lo scarto quadratico medio $\sigma_Z$ e la funzione caratteristica $\varphi_Z(t)$.

   $m_Z =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Z =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

5. La densità di probabilità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y)$ è $f(x, y) = ae^{-x-y}$, per $x \geq 0, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $a$ e verificare se le densità marginali sono uguali; inoltre, calcolare la varianza di $X$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $f_1 = f_2$ ? $\qquad\qquad$ $Var(X) =$

6. con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F_1(x)$, per ogni $x > 0$, e la funzione di rischio $h_2(y)$.

   $F_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

7. Da un'urna, contenente 2 palline bianche e 1 nera, si effettuano 3 estrazioni con restituzione, aggiungendo ogni volta nell'urna 1 pallina dello stesso colore. Definiti gli eventi $E_i$ = *"nell'i-ma estrazione si ottiene pallina bianca"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se $E_1, E_2, E_3$ sono equiprobabili e se sono scambiabili.

   $E_1, E_2, E_3$ *equiprobabili* ? $\qquad\qquad$ $E_1, E_2, E_3$ *scambiabili* ?

**Probabilità e Statistica** (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 12/9/2014.*

1. Si ha $X \in \{1,2\}$, $r \in \{0,1,2\}$; inoltre: $H_0 = (X = 1) \wedge E$, $H_2 = (X = 2) \wedge E^c$, $H_1 = [(X = 1) \wedge E^c] \vee [(X = 2) \wedge E]$, con

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = P(X=2)\,, \quad P(H_0) = P(X=1)P(E|X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,,$$

$$P(H_1) = P(X=1)P(E^c|X=1) + P(X=2)P(E|X=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,,$$

$$P(H_2) = P(X=2)P(E^c|X=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

2. Si ha $Y = 3 - X + |E|$, con $X \in \{1,2\}$, $(X,Y) \in \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,1)\}$, $Y \in \{1,2,3\}$, $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$; inoltre

$$\mathbb{P}(X) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,, \quad P(E) = \sum_{r=1}^{2} P(X=r)P(E|X=r) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui segue: $\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(3 - X + |E|) = 3 - \mathbb{P}(X) + P(E) = 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.

*In alternativa:* $P(Y=1) = P(X=2)P(E^c|X=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $P(Y=2) = P(X=1)P(E^c|X=1) + P(X=2)P(E|X=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $P(Y=3) = P(X=1)P(E|X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; allora: $\mathbb{P}(Y) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{1}{6} = 2$.

Infine: $\gamma = P(X=2)|(X+Y=4) = \frac{P(X=2,X+Y=4)}{P(X+Y=4)} = \frac{P(X=2,Y=2)}{P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)}$, con $P(X=2,Y=2) = P(X=2)P(Y=2|X=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $P(X=1,Y=3) = P(X=1)P(Y=3|X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; pertanto: $\gamma = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$.

3. Si ha: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} a dx + \int_{-1}^{1} a dx + \int_{2}^{3} a dx = 4a = 1$; pertanto: $a = \frac{1}{4}$. Allora: $F(x) = 0$, per $x \leq -3$; $F(x) = \int_{-3}^{x} \frac{1}{4}dt = \frac{x+3}{4}$, per $x \in (-3,-2)$; $F(x) = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}$, per $x \in [-2,-1]$; $F(x) = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{4}dt + \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}dt = \frac{x+2}{4}$, per $x \in (-1,1)$; $F(x) = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{4}dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}dt = \frac{3}{4}$, per $x \in [1,2]$; $F(x) = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{4}dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}dt + \int_{2}^{x} \frac{1}{4}dt = \frac{x+1}{4}$, per $x \in (2,3)$; $F(x) = 1$, per $x \geq 3$. Inoltre, come si può ottenere direttamente dal diagramma di $f(x)$, si ha: $m = 0$; infatti

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-3}^{-2} \frac{x}{4}dx + \int_{-1}^{1} \frac{x}{4}dx + \int_{2}^{3} \frac{x}{4}dx = \frac{1}{8}([x^2]_{-3}^{-2} + [x^2]_{-1}^{1} + [x^2]_{2}^{3}) = 0\,.$$

Infine

$$P(X > m) = \int_{m}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{4}dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{2} = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{4}dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{4}dx = P(X \leq m)\,.$$

4. Ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione normale di parametri $m, \sigma$ è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, segue $X \sim N_{2,2}$, $Y \sim N_{1,\sqrt{2}}$; quindi

$$m_Z = m_X - m_Y = 2 - 1 = 1\,, \quad \sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{6}\,.$$

*Procedimento alternativo:*

$$m_X = \mathbb{P}(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = \cdots, m_X^{(2)} = \mathbb{P}(X^2) = \frac{\varphi''_X(0)}{i^2} = \cdots, m_Y = \cdots, m_Y^{(2)} = \cdots, \ \ldots\ldots$$

Inoltre, essendo $\varphi_{-Y}(t) = \mathbb{P}(e^{it(-Y)}) = \mathbb{P}(e^{i(-t)Y}) = \varphi_Y(-t) = e^{-it-t^2}$, $Z = X + (-Y)$, con $X$ e $-Y$ indipendenti, segue: $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_{-Y}(t) = e^{2it-2t^2}e^{-it-t^2} = e^{it-3t^2}$.

5. Si ha: $\int_0^{+\infty}\int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dxdy = a\int_0^{+\infty}(e^{-x}\int_{\frac{x}{2}}^{2x} e^{-y}dy)dx = a\int_0^{+\infty} e^{-x}[-e^{-y}]_{\frac{x}{2}}^{2x}dx =$ $= a\int_0^{+\infty} e^{-x}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-2x})dx = a\int_0^{+\infty}(e^{-\frac{3}{2}x} - e^{-3x})dx = a[-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}e^{-3x}]_0^{+\infty} = a(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) =$ $= \frac{a}{3} = 1$; pertanto: $a = 3$. Inoltre, per ogni $x > 0, y > 0$, si ha

$$f_1(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{2x} 3e^{-x-y}dy = 3e^{-x}(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-2x}) = 2\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x} - 3e^{-3x}\,,$$

$$f_2(y) = \int_{\frac{y}{2}}^{2y} 3e^{-x-y}dx = 3e^{-y}(e^{-\frac{y}{2}} - e^{-2y}) = 2\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}y} - 3e^{-3y}\,,$$

con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove; quindi le densità marginali sono uguali. Infine, ricordando che per ogni fissato $\lambda > 0$, si ha: $\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$, $\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$, segue:
$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 2\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}dx - \int_0^{+\infty} x\cdot 3e^{-3x}dx = 2\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} = 1$,
$\mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2) = 2\int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}dx - \int_0^{+\infty} x^2\cdot 3e^{-3x}dx = 2\cdot\frac{2}{(\frac{3}{2})^2} - \frac{2}{9} = \frac{14}{9}$; pertanto:
$Var(X) = Var(Y) = \frac{14}{9} - 1^2 = \frac{5}{9}$.

6. Si ha: $F_1(x) = 0$ per $x \leq 0$; inoltre, ricordando che $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x}$, per ogni fissato $x > 0$ si ha: $F_1(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x (2\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t} - 3e^{-3t})dt = 2\int_0^x \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}dt - \int_0^x 3e^{-3t}dt =$ $= 2(1 - e^{-\frac{3}{2}x}) - (1 - e^{-3x}) = e^{-3x} - 2e^{-\frac{3}{2}x} + 1$. Inoltre, tenendo conto che $F_2 = F_1$, segue: $h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{f_2(y)}{1-F_2(y)} = \frac{2\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}y} - 3e^{-3y}}{1-(e^{-3y} - 2e^{-\frac{3}{2}y}+1)} = \frac{3e^{-\frac{3}{2}y} - 3e^{-3y}}{2e^{-\frac{3}{2}y} - e^{-3y}} = \frac{3e^{\frac{3}{2}y} - 3}{2e^{\frac{3}{2}y} - 1}$.

7. Si ha: $P(E_1) = \frac{2}{3}$, $P(E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) + P(E_1^c)P(E_2|E_1^c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2}{3}$,
$P(E_3) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) + P(E_1)P(E_2^c|E_1)P(E_3|E_1E_2^c) + P(E_1^c)P(E_2|E_1^c)P(E_3|E_1^cE_2) +$ $+ P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c)P(E_3|E_1^cE_2^c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{3}$.
Pertanto $E_1, E_2, E_3$ sono equiprobabili; inoltre: $P(E_1E_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$,
$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{2} = P(E_1E_2)$,
$P(E_2E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{2} = P(E_1E_2)$.
Pertanto $E_1, E_2, E_3$ sono scambiabili.