Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 17/1/2014)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un lotto di 100 componenti, contenente 80 pezzi buoni e 20 difettosi, si effettuano 5 estrazioni con restituzione. Calcolare la probabilità α che esattamente tre volte si ottenga un pezzo buono. Sia inoltre X il numero aleatorio di componenti buoni ottenuti nelle 5 estrazioni; indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X, calcolare la probabilità β dell'evento $(m - 2\sigma \leq X \leq m + \sigma)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0,1] \cup [2,3]$ è $f(x) = \frac{1}{3}$, per $x \in [0,1]$, $f(x) = a$, per $x \in [2,3]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a, la previsione di X e la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$

3. Da un gruppo di 5 studenti, dei quali solo 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono presi a caso 3, ad uno dei quali scelto a caso viene sottoposto il quesito. Definiti gli eventi $H_r =$ *"r dei 3 studenti non sanno risolvere il quesito"*, $r = 1, 2, 3$, $A =$ *"lo studente scelto a caso non sa risolvere il quesito"*, calcolare $P(A)$ e stabilire se H_3 ed A sono correlati.

   $P(A) =$ $\qquad\qquad$ $Correlazione?$

4. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta del vettore (X, Y) è $f(x, y) = a(x + y)$, per $(x, y) \in [1, 2] \times [1, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a; inoltre, posto $A = (X \leq Y), B = (X + Y \leq 3)$, stabilire se $P(B|A) = P(B^c|A)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $P(B|A) = P(B^c|A)?$

5. Un sistema S è composto da due dispositivi in parallelo, con il secondo dispositivo che entra in funzione quando si guasta il primo. Le durate aleatorie X e Y dei due dispositivi sono stocasticamente indipendenti, con funzioni di rischio $h_1(x) = h_2(y) = 2$, $\forall x \geq 0$, $\forall y \geq 0$. Calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del tempo aleatorio Z di durata fino al guasto di S. (*ricordiamo che* $G_{c_1,\lambda} * G_{c_2,\lambda} = G_{c_1+c_2,\lambda}$)

   $S_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

6. Utilizzando due urne distinte, ciascuna contenente 2 palline bianche e 1 nera, Tizio e Caio effettuano ognuno 2 estrazioni senza restituzione. Siano X e Y i numeri aleatori di palline bianche ottenuti da Tizio e Caio. Posto $Z = X + Y$, calcolare: (i) $\varphi_Z(t)$; (ii) $Var(Z)$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $Var(Z) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale, di parametri $m_0 = 1$, $\sigma_0 = 3$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_6)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard σ. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_6)$, con $x_1 + \cdots + x_6 = 6$, siano m_6 e σ_6 la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$. Stabilire per quali valori di σ risulta $\sigma_6 < \frac{\sigma}{3}$ e calcolare il valore θ^* tale che $P[(\Theta > \theta^* - 2\sigma_6)|\mathbf{x}] = \Phi(2)$.

   $\sigma \in$ $\qquad\qquad$ $\theta^* =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 17/1/2014.

1. Si ha $X \sim B(n,p)$, con $n=5$, $p=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$, $X \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Pertanto $\alpha = P(X=3) = \binom{5}{3}(\frac{4}{5})^3(\frac{1}{5})^2 = \frac{128}{625} = 0.2048$; inoltre: $m = I\!P(X) = np = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} \simeq 0.9$. Allora: $m - 2\sigma \simeq 2.2$, $m + \sigma \simeq 4.9$; pertanto: $\beta = P(X \in \{3,4\}) = P(X=3)+P(X=4)$, con $P(X=4) = \binom{5}{4}(\frac{4}{5})^4(\frac{1}{5})^1 = (\frac{4}{5})^4 \simeq 0.4096$; quindi: $\beta \simeq 0.2048 + 0.4096 = 0.6144$.

2. Si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_2^3 a dx = \frac{1}{3} + a = 1$; pertanto $a = \frac{2}{3}$. Inoltre
$$\mathbb{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{3}\,dx + \int_2^3 \frac{2}{3}\,x\,dx = \cdots = \frac{11}{6} \in (1,2)\,.$$
Infine, $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}dt = \frac{x}{3}$, per $x \in (0,1]$; $F(x) = \frac{1}{3}$, per $x \in (1,2]$; $F(x) = \frac{1}{3} + \int_2^x \frac{2}{3}dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x-2) = \frac{2}{3}x - 1$, per $x \in (2,3)$; $F(x) = 1$, per $x \geq 3$.

3. Si ha $P(H_r) = \frac{\binom{3}{r}\binom{2}{3-r}}{\binom{5}{3}}$, $r = 1,2,3$; quindi: $P(H_1) = \frac{3}{10}$, $P(H_2) = \frac{6}{10}$, $P(H_3) = \frac{1}{10}$. Inoltre $P(A|H_1) = \frac{1}{3}$, $P(A|H_2) = \frac{2}{3}$, $P(A|H_3) = 1$; pertanto
$$P(A) = \sum_{r=1}^{3} P(A|H_r)P(H_r) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10} + 1\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{5}\,.$$
Infine, osservando che $P(A|H_3) = 1 > \frac{3}{5} = P(A)$, segue che H_3 ed A sono correlati positivamente; infatti, simmetricamente, si ha
$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{1\cdot\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{6} > \frac{1}{10} = P(H_3)\,.$$

4. Si ha
$$\int_1^2 dx \int_1^2 a(x+y)dy = a\int_1^2 \left(x + \frac{3}{2}\right) dx = 3a = 1\,,$$
da cui segue: $a = \frac{1}{3}$. Inoltre $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, con
$$P(AB) = \int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_x^{3-x} \frac{1}{3}(x+y)dy = \cdots = \frac{1}{3}\int_1^{\frac{3}{2}} (\frac{9}{2} - 2x^2)dx = \frac{2}{9}\,,$$
$$P(A) = \int_1^2 dx \int_x^2 \frac{1}{3}(x+y)dy = \cdots = \frac{1}{3}\int_1^2 (-\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2)dx = \cdots = \frac{1}{2}\,.$$
Pertanto: $P(B|A) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} = 1 - P(B^c|A)$. Allora $P(B^c|A) = \frac{5}{9}$; quindi $B|A$ e $B^c|A$ non sono equiprobabili.

5. Si ha

$$f_1(x) = h_1(x)e^{-\int_0^x h_1(t)dt} = \cdots = 2e^{-2x}\,,\ x \geq 0\,; \qquad f_2(y) = \cdots = 2e^{-2y}\,,\ y \geq 0\,;$$

ovvero: $X \sim Exp(2) = G_{1,2}$, $Y \sim Exp(2) = G_{1,2}$. Essendo $Z = X + Y$, con X, Y indipendenti, la sua densità di probabilità è $f_Z = G_{1,2} * G_{1,2} = G_{2,2}$; ovvero

$$f_Z(z) = G_{2,2}(z) = \frac{2^2}{\Gamma(2)} z^{2-1} e^{-2z} = 4ze^{-2z}\,, \quad z \geq 0\,.$$

Pertanto, per ogni $z \geq 0$, si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = \int_z^{+\infty} 4te^{-2t}dt = [-2te^{-2t}]_z^{+\infty} + \int_z^{+\infty} 2e^{-2t}dt = 2ze^{-2z} + e^{-2z}\,,$$

da cui segue

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4ze^{-2z}}{2ze^{-2z} + e^{-2z}} = \frac{4z}{2z+1}\,, \quad z \geq 0\,.$$

6. Si ha $X \sim H(3, 2, \frac{2}{3})$, $Y \sim H(3, 2, \frac{2}{3})$, con $X \in \{1, 2\}$, $Y \in \{1, 2\}$; inoltre

$$P(X = 2) = P(Y = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,, \quad P(X = 1) = P(Y = 1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

Pertanto: $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \frac{2}{3}\,e^{it} + \frac{1}{3}e^{2it}$. Allora, dall'indipendenza stocastica di X e Y segue: $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (\frac{2}{3}\,e^{it} + \frac{1}{3}e^{2it})^2$. Infine,

$$Var(X) = Var(Y) = npq(1 - \frac{n-1}{N-1}) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{9}\,;$$

pertanto: $Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = \frac{4}{9}$.

7. Si ha $\bar{\mathbf{x}} = m_0 = 1$; quindi $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_6,\sigma_6}$, con

$$m_6 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot m_0 + \frac{6}{\sigma^2} \cdot \bar{\mathbf{x}}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{6}{\sigma^2}} = 1\,, \qquad \frac{1}{\sigma_6^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{6}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2 + 54}{9\sigma^2}\,;$$

pertanto $\sigma_6 = \frac{3\sigma}{\sqrt{\sigma^2+54}} < \frac{\sigma}{3} \iff \sigma > 3\sqrt{3}$. Inoltre

$$P[(\Theta > \theta^* - 2\sigma_6)|\mathbf{x}] = 1 - P[(\Theta \leq \theta^* - 2\sigma_6)|\mathbf{x}] = 1 - \Phi_{m_6,\sigma_6}(\theta^* - 2\sigma_6) = 1 - \Phi(\frac{\theta^* - 2\sigma_6 - m_6}{\sigma_6}) = \Phi(2)\,;$$

ovvero $\Phi(\frac{\theta^* - 2\sigma_6 - m_6}{\sigma_6}) = 1 - \Phi(2) = \Phi(-2)$. Allora, essendo Φ una funzione crescente, segue $\frac{\theta^* - 2\sigma_6 - m_6}{\sigma_6} = -2$; pertanto: $\theta^* = m_6 = 1$.