Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 10/7/2015)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Una macchina M produce palline, dello stesso peso e della stessa forma, ognuna bianca o nera con uguale probabilità $\frac{1}{2}$. Considerati gli eventi (stocasticamente indipendenti) $E_i =$ *"l'i-ma pallina prodotta da M è bianca"*, sia L un lotto formato da n palline prodotte da M, delle quali un numero aleatorio X sono nere. Calcolare: (i) i valori di n tali che è maggiore di 0.9 la probabilità p che nel lotto L ci siano almeno due palline nere; (ii) la probabilità condizionata α che in L ci sia esattamente una pallina nera, supposto che in L ci sia almeno una pallina nera, calcolando α per $n = 4$.

   $n \in$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [-3, 3]$ è $f(x) = \frac{1}{8}$, per $x \in [-3, -1] \cup [1, 3]$, $f(x) = a$, per $x \in (-1, 1)$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a, la previsione m di X e i valori x tali che $F(x) > \frac{3}{4}$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $m =$ $\qquad\qquad$ $x \in$

3. Dato un vettore aleatorio discreto $(X, Y) \in \{(-3, -2), (-3, -1), (-1, 0), (1, 0), (3, 1), (3, 2)\}$, con $P(X = -1, Y = 0) = P(X = 1, Y = 0) = a$ e con gli altri punti ugualmente probabili fra di loro, calcolare i valori coerenti che si possono assegnare ad a. Inoltre, calcolare il valore di a tale che X e Y sono incorrelati e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $a \in$ $\qquad\qquad$ $a =$ $\qquad\qquad$ *Indipendenza* ?

4. Dati due numeri aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e ugualmente distribuiti, con funzione caratteristica e^{it-2t^2}, calcolare la funzione caratteristica e la varianza del numero aleatorio $Z = X - Y$; inoltre, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $(m_Z - \sigma_Z \leq Z \leq m_Z + \sigma_Z) \mid (m_Z - 2\sigma_Z \leq Z \leq m_Z + 2\sigma_Z)$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Z^2 =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

5. Dato un vettore aleatorio continuo (X, Y), con densità $f(x, y) = 2e^{-2x-y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, e con $f(x, y) = 0$ calcolare la covarianza della coppia $(X + Y, X - Y)$. Inoltre, posto $Z = \frac{X+Y}{2}$, calcolare la previsione e la varianza di Z.

   $Cov(X+Y, X-Y) =$ $\qquad\qquad$ $m_Z =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Z^2 =$

6. Con riferimento all'esercizio 5, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del numero aleatorio Z.

   $S_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 2,\ \sigma_0 = 3$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_7)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_7)$, con $x_1 + \cdots + x_7 = 14$, calcolare (utilizzando la distribuzione finale di Θ) la probabilità p dell'evento condizionato $(\Theta > \frac{13}{8} \mid \Theta > \frac{5}{4}; \mathbf{x})$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 10/7/2015.

1. Si ha $X \sim B(n, \frac{1}{2})$, con $p = P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^n} = \frac{2^n - n - 1}{2^n}$. Si ha: $\frac{2^n - n - 1}{2^n} > 0.9 \iff 2^n - 10(n+1) > 0 \iff n \geq 7$; pertanto: $p > 0.9$ per $n \geq 7$. Inoltre
$$\alpha = P(X = 1 | X \geq 1) = \frac{P(X = 1, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\frac{n}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{n}{2^n - 1}\,,$$
con $\alpha = \frac{4}{15}$ per $n = 4$.

2. Si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{8}dx + \int_{-1}^{1} a dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{8}dx = 2a + \frac{1}{2} = 1$; pertanto: $a = \frac{1}{4}$. Inoltre
$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{8}xdx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}xdx + \int_{1}^{3} \frac{1}{8}xdx = \cdots = 0\,;$$
tale risultato seguirebbe immediatamente osservando che $f(x)$ ha un diagramma simmetrico rispetto all'asse y. Infine, per $x \in (1, 3)$, si ha
$$F(x) = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{8}dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}dx + \int_{1}^{x} \frac{1}{8}dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(x-1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}(x-1) > \frac{3}{4}\,,$$
con $F(1) = \frac{3}{4}$ e con $F(x) = 1$ per $x \geq 3$; pertanto: $F(x) > \frac{3}{4}$ per $x > 1$.

3. Si ha $P(X = -1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = 2a$, con $0 \leq 2a \leq 1$; pertanto $a \in [0, \frac{1}{2}]$, con $P(X = x, Y = y) = \frac{1-2a}{4}$ per ogni $(x, y) \in \{(-3,-2), (-3,-1), (3,1), (3,2)\}$. Inoltre $X \in \{-3,-1,1,3\}$, $Y \in \{-2,-1,0,1,2\}$, $XY \in \{0,3,6\}$, con
$$P(X = -3) = P(X = 3) = \frac{1-2a}{2}\,,\ P(X = -1) = P(X = 1) = a\,,$$
$$P(Y = -2) = P(Y = -1) = P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1-2a}{4}\,,\ P(Y = 0) = 2a\,,$$
$$P(XY = 3) = P(XY = 6) = \frac{1-2a}{2}\,,\ P(XY = 0) = 2a\,,$$
Allora: $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 0$, $\mathbb{P}(XY) = \frac{9-18a}{2}$; pertanto: $Cov(X,Y) = \frac{9-18a}{2} = 0$ per $a = \frac{1}{2}$. Infine, osservando ad esempio che $a = P(X = -1, Y = 0) \neq P(X = -1)P(Y = 0) = a \cdot 2a = 2a^2$, segue che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha
$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{itX - itY}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{i(-t)Y})\varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = e^{it-2t^2}e^{-it-2t^2} = e^{-4t^2}\,.$$
Allora: $\varphi'_Z(t) = -8te^{-4t^2}\,,\quad \varphi''_Z(t) = -8e^{-4t^2} + 64t^2e^{-4t^2}\,,\quad \varphi'_Z(0) = 0\,,\quad \varphi''_Z(0) = -8$, da cui segue
$$\mathbb{P}(Z) = \frac{\varphi'_Z(0)}{i} = 0\,,\quad \mathbb{P}(Z^2) = \frac{\varphi''_Z(0)}{i^2} = \frac{-8}{-1} = 8\,,\quad \sigma_Z^2 = \mathbb{P}(Z^2) - [\mathbb{P}(Z)]^2 = \mathbb{P}(Z^2) = 8\,.$$

Infine, osservando che:
(i) $\varphi_Z(t)$ è la funzione caratteristica di una distribuzione normale con parametri $m_Z = 0$, $\sigma_Z = 2\sqrt{2}$,
(ii) $(-2\sqrt{2} \leq Z \leq 2\sqrt{2}) \wedge (-4\sqrt{2} \leq Z \leq 4\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2} \leq Z \leq 2\sqrt{2})$,
tenendo conto che $\Phi(1) \simeq 0.8413$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$\gamma = \frac{P(-2\sqrt{2} \leq Z \leq 2\sqrt{2})}{P(-4\sqrt{2} \leq Z \leq 4\sqrt{2})} = \frac{\Phi_{0,2\sqrt{2}}(2\sqrt{2}) - \Phi_{0,2\sqrt{2}}(-2\sqrt{2})}{\Phi_{0,2\sqrt{2}}(4\sqrt{2}) - \Phi_{0,2\sqrt{2}}(-4\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{\Phi(\frac{2\sqrt{2}-0}{2\sqrt{2}}) - \Phi(\frac{-2\sqrt{2}-0}{2\sqrt{2}})}{\Phi(\frac{4\sqrt{2}-0}{2\sqrt{2}}) - \Phi(\frac{-4\sqrt{2}-0}{2\sqrt{2}})} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{\Phi(2) - \Phi(-2)} = \frac{2\Phi(1) - 1}{2\Phi(2) - 1} \simeq \frac{0.6826}{0.9544} \simeq 0.7152\,.$$

5. Si ha $f_1(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x-y}dy = \cdots = 2e^{-2x}$, $x \geq 0$; $f_2(y) = \cdots = e^{-y}$, $y \geq 0$. Pertanto X e Y hanno una distribuzione esponenziale di parametri rispettivi $\lambda_X = 2$, $\lambda_Y = 1$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y); quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti. Allora $Cov(X,Y) = 0$ e si ha

$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) =$$

$$= Var(X) - Var(Y) = \frac{1}{\lambda_X^2} - \frac{1}{\lambda_Y^2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}\,.$$

Inoltre: $m_Z = \mathbb{P}(\frac{X+Y}{2}) = \frac{1}{2}[\mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)] = \frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda_X} + \frac{1}{\lambda_Y}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$;
$\sigma_Z^2 = Var(\frac{X+Y}{2}) = \frac{1}{4}Var(X+Y) = \frac{1}{4}[Var(X) + Var(Y)] = \frac{1}{4}(\frac{1}{\lambda_X^2} + \frac{1}{\lambda_Y^2}) = \frac{5}{16}$.

6. Fissato $z > 0$, si ha $S_Z(z) = P(Z > z) = P(X+Y > 2z) = 1 - P(X+Y \leq 2z)$, con

$$P(X+Y \leq 2z) = P(Y \leq 2z-X) = \int_0^{2z} dx \int_0^{2z-x} 2e^{-2x-y}dy = \int_0^{2z} (2e^{-2x} \int_0^{2z-x} e^{-y}dy)dx =$$

$$= \int_0^{2z} 2e^{-2x}(1-e^{-2z+x})dx = \int_0^{2z} 2e^{-2x}dx - 2e^{-2z} \int_0^{2z} e^{-x}dx = 1-e^{-4z} - 2e^{-2z}(1-e^{-2z}) =$$

$$= 1 - 2e^{-2z} + e^{-4z} = F_Z(z)\,; \quad S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = 2e^{-2z} - e^{-4z}\,.$$

Inoltre: $f_Z(z) = F_Z'(z) = 4e^{-2z} - 4e^{-4z}$; pertanto: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4e^{-2z}-4e^{-4z}}{2e^{-2z}-e^{-4z}} = \frac{4e^{2z}-4}{2e^{2z}-1}$.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_7,\sigma_7}$, con $\frac{1}{\sigma_7^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{7}{\sigma^2} = \frac{1}{9} + 7 = \frac{64}{9}$, e quindi $\sigma_7 = \frac{3}{8}$, e con $m_7 = m_0 = 2$ in quanto $\overline{x} = m_0$. Pertanto, per la distribuzione finale risulta $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{2,\frac{3}{8}}$. Allora, osservando che $m_7 - \sigma_7 = \frac{13}{8}$, $m_7 - 2\sigma_7 = \frac{5}{4}$, segue

$$p = P(\Theta > \frac{13}{8} \mid \Theta > \frac{5}{4}; \mathbf{x}) = \frac{P(\Theta > \frac{13}{8} \mid \mathbf{x})}{P(\Theta > \frac{5}{4} \mid \mathbf{x})} = \frac{1 - P(\Theta \leq \frac{13}{8} \mid \mathbf{x})}{1 - P(\Theta \leq \frac{5}{4} \mid \mathbf{x})} =$$

$$= \frac{1 - \Phi_{m_7,\sigma_7}(m_7 - \sigma_7)}{1 - \Phi_{m_7,\sigma_7}(m_7 - 2\sigma_7)} = \frac{1 - \Phi(-1)}{1 - \Phi(-2)} = \frac{\Phi(1)}{\Phi(2)} \simeq \frac{0.8413}{0.9772} \simeq 0.8609\,.$$