**Probabilità e Statistica** (*Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 11/9/2015)
*(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)*

1. Da un'urna contenente 1 pallina bianca e 4 nere si estraggono, senza restituzione, tutte le palline. Tizio effettua la prima estrazione e Caio l'ultima; ognuno dei due vince un premio se estrae la pallina bianca. Definiti gli eventi $E_i$ = "l'i-ma pallina estratta è bianca", $i = 1, \ldots, 5$, calcolare: (i) la probabilità $\alpha$ che Caio vinca il premio; (ii) la probabilità $\beta$ che nè Tizio nè Caio vincano il premio; (iii) la probabilità condizionata $\gamma$ che Tizio vinca il premio, supposto che uno dei due vinca il premio.

$\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y)$ è $f(x, y) = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{(x+1)^2+(y-1)^2}{8}}$. Calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = Y - X$ e la probabilità $p$ dell'evento condizionato $(Z > 2 + 2\sqrt{2} \mid Z > 2 - 4\sqrt{2})$.
(*ricordiamo che per una distribuzione normale* $N_{m,\sigma}$ *si ha* $\varphi(t) = e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$).

$\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Un autoveicolo percorre in andata e ritorno un tratto di strada, impiegando un tempo aleatorio (in ore) $X$ in andata e $Y$ nel ritorno. La densità congiunta del vettore aleatorio $(X, Y)$ è $f(x, y) = k(y - x)$, per $(x, y) \in Q = [2, 3] \times [3, 4]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $k$; inoltre, indicando con $T$ il tempo aleatorio totale di percorrenza, calcolare la previsione $m_T$ di $T$ e la probabilità $p$ dell'evento $(T > m_T)$.

$k =$ $\qquad\qquad$ $m_T =$ $\qquad\qquad$ $p =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F_2$ di $Y$ e il valore $y_0$ tale che $P(Y > y_0) = 2P(Y \leq y_0)$.

$F_2(y) =$ $\qquad\qquad$ $y_0 =$

5. Dati due numeri aleatori $X, Y$, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione binomiale, di parametri $n = 2, p = \frac{1}{2}$, sia $U = X + aY, V = aX - Y$. Calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(X + Y > 0 \,|\, X + Y < 2)$ e la covarianza di $U, V$.

$\alpha =$ $\qquad\qquad$ $Cov(U, V) =$

6. Dati 3 eventi $A, B, C$, indipendenti ed equiprobabili di probabilità $p$, con $0 < p < 1$, sia $X = |A| - |B| + |C|$ e $Y = |A| + |B| - |C|$. Determinare: (i) il valore di $p$ tale che la covarianza di $X$ e $Y$ sia minima; (ii) il coefficiente di correlazione $\rho$ di $X, Y$.

$p =$ $\qquad\qquad$ $\rho =$

7. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y)$ è $f(x, y) = ke^{-x-y}$, per $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \frac{x}{2}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $k$ e la funzione di rischio $h_1(x)$ del numero aleatorio $X$.

$k =$ $\qquad\qquad$ $h_1(x) =$

**Probabilità e Statistica** (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 11/9/2015.*

1. Gli eventi $E_1, \ldots, E_5$ sono scambiabili e, in particolare, equiprobabili. Allora: $\alpha = P(E_5) = P(E_1) = \frac{1}{5}$. Inoltre: $\beta = P(E_1^c E_5^c) = P(E_1^c E_2^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$. Infine
$$\gamma = P(E_1 \,|\, E_1 \vee E_5) = \frac{P(E_1)}{P(E_1 \vee E_5)} = \frac{P(E_1)}{P(E_1) + P(E_5)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Si ha: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x+1)^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-1)^2}{8}} dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-1)^2}{8}}$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$.
Pertanto: $X \sim N_{-1,2}(x), Y \sim N_{1,2}(y)$, con $X, Y$ stocasticamente indipendenti e con $\varphi_X(t) = e^{-it-2t^2}$, $\varphi_Y(t) = e^{it-2t^2}$; allora
$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(Y-X)}) = \mathbb{P}(e^{itY})\mathbb{P}(e^{i(-t)X}) = \varphi_Y(t)\varphi_X(-t) = e^{2it-4t^2}\,.$$
Quindi $Z$ ha una distribuzione normale con parametri $m = 2, \sigma = 2\sqrt{2}$. Allora, osservando che $\Phi(1) \simeq 0.8413\,,\ \Phi(2) \simeq 0.9772$, segue
$$p = P(Z > 2 + 2\sqrt{2} \mid Z > 2 - 4\sqrt{2}) = \frac{P(Z > 2 + 2\sqrt{2})}{P(Z > 2 - 4\sqrt{2})} =$$
$$= \frac{1 - \Phi_{2,2\sqrt{2}}(2 + 2\sqrt{2})}{1 - \Phi_{2,2\sqrt{2}}(2 - 4\sqrt{2})} = \frac{1 - \Phi(1)}{1 - \Phi(-2)} = \frac{1 - \Phi(1)}{\Phi(2)} \simeq \frac{1 - 0.8413}{0.9772} \simeq 0.1624\,.$$

3. Si ha: $\int_2^3 \int_3^4 k(y-x)dxdy = \cdots = \int_2^3 \left(\frac{7}{2} - x\right) dx = \frac{k}{2}(21 - 9 - 14 + 4) = 1$; pertanto: $k = 1$. Inoltre
$$m_T = \mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(X+Y) = \int_2^3 \int_3^4 (x+y)(y-x)dxdy = \cdots = \int_2^3 \left(-x^2 + \frac{37}{3}\right) dx = \cdots = 6\,.$$
Infine, osservando che $(T > m_T) = (T > 6)$, segue
$$p = P(T > 6) = \int_2^3 dx \int_{6-x}^4 (y - x)dy = \cdots = \int_2^3 \left(-10 + 8x - \frac{3}{2}x^2\right) dx = \cdots = \frac{1}{2}\,.$$

4. Si ha $Y \in [3,4]$; quindi $P(Y \leq y) = F_2(y) = 0$ per ogni $y \leq 3$; $P(Y \leq y) = F_2(y) = 1$ per ogni $y \geq 4$; inoltre, per $y \in (3,4)$ si ha
$$P(Y \leq y) = F_2(y) = P(2 \leq X \leq 3, Y \leq y) = \int_3^y du \int_2^3 (u - x)dx =$$
$$= \int_3^y [ux - \frac{x^2}{2}]_2^3 du = \int_3^y (u - \frac{5}{2})du = \frac{y^2}{2} - \frac{5}{2}\,y + 3\,.$$
Allora, osservando che $P(Y > y_0) + P(Y \leq y_0) = 3P(Y \leq y_0) = 1$, segue $P(Y \leq y_0) = F_2(y_0) = \frac{1}{3}$; quindi: $\frac{y_0^2}{2} - \frac{5}{2}\,y_0 + 3 = \frac{1}{3}$, con $y_0 \in [3,4]$, da cui si ottiene: $y_0 = \frac{15+\sqrt{33}}{6}$.

5. Si ha $X \in \{0,1,2\}, Y \in \{0,1,2\}, X+Y \in \{0,1,\ldots,4\}$, con

$$P(X=0)=P(Y=0)=P(X=2)=P(Y=2)=\frac{1}{4}\,,\ P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}\,,$$

$$P(X=h,Y=k)=P(X=h)P(Y=k)\,,\quad h=0,1,2,\ k=0,1,2\,.$$

Allora

$$\alpha=\frac{P(X+Y>0,X+Y<2)}{P(X+Y<2)}=\frac{P(X+Y=1)}{P(X+Y=0)+P(X+Y=1)}=$$

$$=\frac{P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)}{P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)}=\frac{\frac14\cdot\frac12+\frac12\cdot\frac14}{\frac14\cdot\frac14+\frac14\cdot\frac12+\frac12\cdot\frac14}=\frac{4}{5}\,.$$

Inoltre, osservando che $Var(X)=Var(Y)=npq=\frac12$, $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)=0$, segue

$$Cov(U,V)=Cov(X+aY,aX-Y)=aCov(X,X)-Cov(X,Y)+a^2Cov(Y,X)-aCov(Y,Y)=$$

$$=a[Var(X)-Var(Y)]=a(\frac12-\frac12)=0\,.$$

*In alternativa:* $\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(Y)=np=1, \mathbb{P}(X^2)=\mathbb{P}(Y^2)=Var(X)+[\mathbb{P}(X)]^2=npq+(np)^2=\frac32$, $\mathbb{P}(XY)=\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)=1$, $Cov(U,V)=\mathbb{P}(UV)-\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)$, con $\mathbb{P}(UV)=\mathbb{P}(aX^2-XY+a^2XY-aY^2)=a^2-1$; $\mathbb{P}(U)=\mathbb{P}(X)+a\mathbb{P}(Y)=1+a$, $\mathbb{P}(V)=a\mathbb{P}(X)-\mathbb{P}(Y)=a-1$; $\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)=a^2-1=\mathbb{P}(UV)$; quindi: $Cov(U,V)=\mathbb{P}(UV)-\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)=0$.

6. Si ha $\mathbb{P}(X)=P(A)-P(B)+P(C)=p$, $\mathbb{P}(Y)=PA)+P(B)-P(C)=p$; inoltre $|A||B|=|AB|$, $|A||A|=|A|$, da cui segue $XY=(|A|-|B|+|C|)(|A|+|B|-|C|)=$ $=|A|+|AB|-|AC|-|AB|-|B|+|BC|+|AC|+|BC|-|C|=|A|-|B|+2|BC|-|C|$, con $\mathbb{P}(XY)=P(A)-P(B)+2P(BC)-P(C)=2p^2-p$; pertanto

$$Cov(X,Y)=\mathbb{P}(XY)-\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)=2p^2-p-p^2=p^2-p\geq-\frac14\,,$$

con $Cov(X,Y)=-\frac14$ per $p=\frac12$. Inoltre

$$Var(X)=Var(Y)=Var(|A|)+Var(|B|)+Var(|C|)=3p(1-p)\,;$$

allora $\rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-p(1-p)}{3p(1-p)}=-\frac13$, $\forall p\in(0,1)$.

7. Ricordando che, per ogni $\lambda>0$, si ha $\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1$, segue

$$k\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\frac{x}{2}}e^{-x-y}dy=k\int_0^{+\infty}e^{-x}(1-e^{-\frac{x}{2}})dx=k\int_0^{+\infty}e^{-x}dx-\frac23k\int_0^{+\infty}\frac32e^{-\frac32x}dx=k-\frac23\,k=1\,;$$

allora: $k=3$. Inoltre, fissato $x\geq0$, si ha

$$f_1(x)=\int_0^{\frac{x}{2}}3e^{-x-y}dy=3e^{-x}(1-e^{-\frac{x}{2}})=3e^{-x}-3e^{-\frac32x}\,,$$

con $f_1(x)=0$ altrove. Allora, ricordando che , per ogni $\lambda>0$, si ha $\int_x^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda x}$, segue

$$S_1(x)=P(X>x)=\int_x^{+\infty}f_1(t)dt=3\int_x^{+\infty}e^{-t}dt-2\int_x^{+\infty}\frac32\,e^{-\frac32t}dt=3e^{-x}-2e^{-\frac32x}\,;$$

pertanto: $h_1(x)=\frac{f_1(x)}{S_1(x)}=\frac{3e^{-x}-3e^{-\frac32x}}{3e^{-x}-2e^{-\frac32x}}=\frac{3\,e^{\frac{x}{2}}-3}{3\,e^{\frac{x}{2}}-2}$.