Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 12/6/2015)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Un oggetto percorre uno spazio di 24 metri con una velocità aleatoria costante (in m/sec) pari a V, la cui distribuzione di probabilità è uniforme nell'intervallo $[1, 3]$. Indicando con T il tempo aleatorio impiegato per effettuare il percorso, calcolare: (i) la probabilità p dell'evento condizionato $(T > t \,|\, T > \tau)$, con $8 < \tau < t < 24$; (ii) la mediana M di T.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\mu =$

2. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere vengono estratte a caso tutte le palline. Tizio vince un premio se le prime tre palline sono bianche (evento A), Caio vince un premio se le ultime tre palline sono bianche (evento B). Posto $E_i =$ *"l'i-ma pallina è bianca"*, $i = 1, ..., 5$, calcolare: (i) la probabilità p che Tizio oppure Caio vinca il premio (evento E); (ii) la probabilità α che si verifichi l'evento E supposto che la terza pallina sia bianca.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = 3|A| + 3|B| - 2|E|$.

   $$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

4. Un oggetto si muove da A a B, impiegando un tempo aleatorio X, e poi da B a C impiegando un tempo aleatorio Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 2e^{-x-y}$ per $x \geq 0, y \geq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Posto $Z = Y - X$, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, calcolare la previsione μ di Z e la probabilità $P(Z \leq z)$, con $z > 0$.

   Indip. stocast. ? $\qquad\qquad$ $\mu =$ $\qquad\qquad$ $P(Z \leq z) =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del numero aleatorio $T = X + Y$.

   $S_T(t) =$ $\qquad\qquad$ $h_T(t) =$

6. Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori X e Y stocasticamente indipendenti sono $\varphi_X(t) = e^{it-t^2}$, $\varphi_Y(t) = e^{2it-3t^2}$. Posto $Z = Y - X$, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio di Z; inoltre, calcolare la probabilità p dell'evento $(m - \sigma \leq Z \leq m + \sigma)$.

   $m =$ $\qquad\qquad$ $\sigma =$ $\qquad\qquad$ $p =$

7. Un operatore prende a caso un lotto da un insieme di 5 lotti, uno dei quali contiene 2 pezzi difettosi e 1 buono, mentre gli altri 4 lotti contengono 1 pezzo difettoso e 2 buoni. Successivamente, l'operatore esamina a caso tutti i pezzi del lotto. Definiti gli eventi $H =$ *"il lotto utilizzato dall'operatore contiene 2 pezzi difettosi e 1 buono"*, $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare: (i) $P(H|E_1E_2^c)$; (ii) $P(E_1|E_3)$.

   $P(H|E_1E_2^c) =$ $\qquad\qquad$ $P(E_1|E_3) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 12/6/2015.

1. Si ha: $s = 24 = VT$; pertanto: $T = \frac{24}{V}$, con $T \in [8, 24]$. Allora, fissati t e τ, con $8 < \tau < t < 24$, si ha

$$p = P(T > t \,|\, T > \tau) = \frac{P(T > t, T > \tau)}{P(T > \tau)} = \frac{P(T > t)}{P(T > \tau)},$$

con

$$P(T > t) = P\left(V < \frac{24}{t}\right) = \int_1^{\frac{24}{t}} f_V(v)\,dv = \int_1^{\frac{24}{t}} \frac{1}{2}\,dv = \frac{24 - t}{2t}, \quad 8 < t < 24,$$

e con $P(T > \tau) = \frac{24-\tau}{2\tau}$; allora: $p = \frac{\tau(24-t)}{t(24-\tau)}$. Inoltre: $P(T > M) = P(T \leq M) = \frac{1}{2}$, con $P(T > M) = \frac{24-M}{2M}$, da cui segue: $M = 12$.

2. Gli eventi sono scambiabili, con $P(E_i) = P(E_1) = \frac{3}{5}$, $i = 1, ..., 5$; inoltre $P(E_iE_jE_k) = P(E_1E_2E_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$, per ogni $\{i, j, k\} \subset \{1, ..., 5\}$. Si ha $E = A \vee B$, con $AB = \emptyset$ e con $P(A) = P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{10} = P(E_3E_4E_5) = P(B)$, da cui segue

$$p = P(E) = P(A \vee B) = P(E_1E_2E_3 \vee E_3E_4E_5) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5}.$$

Inoltre, osservando che $A \vee B$ implica l'evento E_3, segue: $E_3 \wedge (A \vee B) = A \vee B$. Allora

$$\alpha = P(A \vee B \,|\, E_3) = \frac{P[E_3 \wedge (A \vee B)]}{P(E_3)} = \frac{P(A \vee B)}{P(E_3)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

3. Osservando che $E = A \vee B$, con $AB = \emptyset$, segue $|E| = |A \vee B| = |A| + |B|$; allora $X = 3|A| + 3|B| - 2|E| = 3|E| - 2|E| = |E| = |A| + |B|$. Si hanno due costituenti: $E = A \vee B$, $E^c = A^cB^c$; i corrispondenti valori per X sono: 1,0, con

$$P(X = 1) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5}, \quad P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = \frac{4}{5}.$$

Pertanto: $F(x) = 0$ per $x < 0$, $F(x) = \frac{4}{5}$ per $0 \leq x < 1$, $F(x) = 1$ per $x \geq 1$.

4. Si ha

$$f_1(x) = \int_x^{+\infty} 2e^{-x-y}dy = 2e^{-x}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; inoltre

$$f_2(y) = \int_0^y 2e^{-x-y}dx = 2e^{-y}\int_0^y e^{-x}dx = 2e^{-y}(1 - e^{-y}) = 2e^{-y} - 2e^{-2y}, \quad y \geq 0,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Si ha $f(x, y) \neq f_1(x)f_2(y)$; pertanto X ed Y non sono stocasticamente indipendenti. X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$;

la densità di Y è una combinazione lineare, con coefficienti 2 e -1, di due densità esponenziali di parametri 1 e 2. Allora

$$\mathbb{P}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\,, \qquad \mathbb{P}(Y) = \cdots = 2 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,, \qquad \mu = \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X) = 1\,.$$

Inoltre, fissato $z > 0$, si ha

$$P(Z > z) = P(Y - X > z) = P(Y > X + z) = \int_0^{+\infty} dx \int_{x+z}^{+\infty} 2e^{-x-y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2e^{-x} e^{-x-z} dx = e^{-z} \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx = e^{-z}\,; \quad P(Z \leq z) = 1 - e^{-z}\,.$$

(Z ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$)

5. Fissato $t > 0$, il punto di intersezione tra le rette di equazione $y = x$ e $x + y = t$ ha coordinate $(\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$; inoltre l'evento $(T \leq t)$ coincide con l'evento $[(X, Y) \in D]$, dove D è il triangolo di vertici i punti $(0,0), (\frac{t}{2}, \frac{t}{2}), (0, t)$. Allora

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P[(X, Y) \in D] = \int_0^{\frac{t}{2}} dx \int_x^{t-x} 2e^{-x-y} dy = \cdots = 1 - e^{-t} - te^{-t}\,;$$

pertanto: $S_T(t) = P(T > t) = 1 - F_T(t) = e^{-t} + te^{-t}$, $f_T(t) = F_T'(t) = \cdots = te^{-t}$, *($T$ ha una distribuzione Gamma $G_{2,1}$)*. Allora: $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{te^{-t}}{e^{-t}+te^{-t}} = \frac{t}{1+t}$.

6. Si ha $Z = Y + (-X)$, con $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t)$ e con $-X$ e Y stocasticamente indipendenti; allora

$$\varphi_Z(t) = \varphi_Y(t)\varphi_{-X}(t) = \varphi_Y(t)\varphi_X(-t) = e^{2it-3t^2} e^{-it-t^2} = e^{it-4t^2}\,;$$

pertanto Z ha una distribuzione normale di parametri $m = 1$, $\sigma = 2\sqrt{2}$. Allora

$$p = \Phi_{1,2\sqrt{2}}(1 + 2\sqrt{2}) - \Phi_{1,2\sqrt{2}}(1 - 2\sqrt{2}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.6826\,.$$

Nota: m e σ si possono ricavare anche dalle formule: $m = \mathbb{P}(Z) = \frac{\varphi_Z'(0)}{i} = \cdots = 1$, $m^{(2)} = \mathbb{P}(Z^2) = \frac{\varphi_Z''(0)}{i^2} = -\varphi_Z''(0) = \cdots = 9$, *da cui segue:* $\sigma = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$.

7. Si ha $P(E_1 E_2^c | H) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(E_1 E_2^c | H^c) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$, $P(H) = \frac{1}{5}$; quindi

$$P(E_1 E_2^c) = P(E_1 E_2^c | H) P(H) + P(E_1 E_2^c | H^c) P(H^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{3}\,.$$

Allora

$$P(H | E_1 E_2^c) = \frac{P(E_1 E_2^c | H) P(H)}{P(E_1 E_2^c)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} = P(H)\,.$$

Inoltre, gli eventi E_i sono scambiabili, con $P(E_i) = P(E_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$, e con

$$P(E_i E_j) = P(E_1 E_2) = P(E_1 E_2 | H) P(H) + P(E_1 E_2 | H^c) P(H^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{15}\,;$$

quindi

$$P(E_1 | E_3) = \frac{P(E_1 E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_1 E_2)}{P(E_1)} = P(E_2 | E_1) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{6} < \frac{2}{5} = P(E_1)\,.$$