**Probabilità e Statistica** (*Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 13/2/2015)

*(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)*

1. Date due urne $U$, contenente 1 pallina bianca e 2 nere, e $V$, contenente 2 palline bianche e 1 nera, da ciascuna urna si estraggono senza restituzione 2 palline, ottenendo rispettivamente un n. a. aleatorio $X$ e un n. a. $Y$ di palline bianche. Posto $Z = X + Y$, calcolare la varianza di $Z$, la funzione di ripartizione $F(z)$ di $Z$ e la probabilità condizionata $p = P(X = 1|Z = 2)$.

   $Var(Z) =$ $\qquad$ $F(z) =$ $\qquad$ $p =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $V = Y - X$, calcolare la covarianza di $V, Z$ e la funzione caratteristica di $V$.

   $Cov(V, Z) =$ $\qquad$ $\varphi_V(t) =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [2, 4]$ è $f(x) = 2c$, per $x \in [2, 3]$, $f(x) = c$, per $x \in (3, 4]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante $c$ e la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $c =$ $\qquad$ $F(x) =$

4. Un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ ha una distribuzione uniforme sul triangolo $T$ di vertici i punti $(1, 1), (3, 1), (1, 3)$. Calcolare le densità marginali $f_1(x)$, per $x \in [1, 3]$, ed $f_2(y)$, per $y \in [1, 3]$; inoltre, stabilire se $X$ e $Y$ sono incorrelati.

   $f_1(x) =$ $\qquad$ $f_2(y) =$ $\qquad$ $Cov(X, Y) = 0$ ?

5. Una persona attende ad una fermata, a partire dall'istante 0, l'arrivo del primo fra 3 autobus, ognuno dei quali si presenta a caso nell'intervallo $[0, 2]$. Sia $T$ il tempo aleatorio di attesa fino all'arrivo del primo autobus. Assumendo che i tempi aleatori di arrivo, $X_1, X_2, X_3$, dei tre autobus siano indipendenti, calcolare la probabilità $\alpha = P(T \leq 1)$ e il tempo medio di attesa $m_T$.

   $\alpha =$ $\qquad$ $m_T =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$, con $X \geq 0, Y \geq 0$, è $f(x, y) = ce^{-x-y}$, per $x \geq 0, 0 \leq y \leq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $c$ e, per ogni $x > 0$, la funzione di rischio di $X$.

   $c =$ $\qquad$ $h_1(x) =$

7. Da un'urna $U$, contenente 2 palline bianche e 4 nere, si effettuano 6 estrazioni senza restituzione. Tizio vince un premio se le 2 palline bianche escono nelle prime 3 estrazioni; Caio vince un premio se le 2 palline bianche escono nelle ultime 3 estrazioni. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", calcolare: (i) la probabilità $\alpha$ che almeno uno tra Tizio e Caio vinca il premio; (ii) la probabilità condizionata $\gamma$ che Tizio vinca il premio supposto che uno dei due abbia vinto il premio.

   $\alpha =$ $\qquad$ $\gamma =$

**Probabilità e Statistica** (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 13/2/2015.*

1. Si ha: $X \sim H(3, 2, \frac{1}{3})$, $Y \sim H(3, 2, \frac{2}{3})$, con $X$ e $Y$ stocasticamente indipendenti; pertanto $Var(X) = Var(Y) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{9}$, $Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = \frac{4}{9}$.
Inoltre: $X \in \{0, 1\}$, $Y \in \{1, 2\}$, con
$$P(X = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,\ P(X = 1) = \frac{2}{3}\,; \quad P(Y = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,\ P(Y = 1) = \frac{2}{3}\,;$$
allora: $Z \in \{1, 2, 3\}$, con $P(Z = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $P(Z = 3) =$ $= P(X = 1)P(Y = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, $P(Z = 2) = 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$. Pertanto: $F(z) = 0$ per $z < 1$; $F(z) = \frac{2}{9}$ per $1 \leq z < 2$; $F(z) = \frac{7}{9}$ per $2 \leq z < 3$; $F(z) = 1$ per $z \geq 3$. Infine
$$p = P(X = 1|Z = 2) = \frac{P(X = 1, X + Y = 2)}{P(Z = 2)} = \frac{P(X = 1)P(Y = 1)}{P(Z = 2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}\,.$$

2. Si ha
$Cov(V, Z) = Cov(Y - X, X + Y) = Cov(Y, X) + Cov(Y, Y) - Cov(X, X) - Cov(X, Y) =$ $= Var(Y) - Var(X) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$. Inoltre: $V \in \{0, 1, 2\}$, con $P(V = 0) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, $P(V = 2) = P(X = 0)P(Y = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $P(V = 1) = 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$. Allora, posto $P(V = h) = p_h$, si ha
$$\varphi_V(t) = \sum_{h=1}^{2} p_h e^{ith} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}e^{it} + \frac{1}{9}e^{2it} = \frac{4 + 4e^{it} + e^{2it}}{9}\,.$$

3. Dev'essere: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero $\int_2^3 2c\,dx + \int_3^4 c\,dx = 2c + c = 3c = 1$; pertanto $c = \frac{1}{3}$. Inoltre, ricordando che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, per $x \leq 2$ si ha: $F(x) = 0$; per $x \in (2, 3]$ si ha: $F(x) = \int_2^x \frac{2}{3}dt = \frac{2}{3}(x-2)$; per $x \in (3, 4)$ si ha: $F(x) = \int_2^3 \frac{2}{3}dt + \int_3^x \frac{1}{3}dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(x-3) = \frac{x-1}{3}$; per $x \geq 4$ si ha $F(x) = 1$.

4. L'area di $T$ è $\mu(T) = 2$; pertanto: $f(x, y) = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{2}$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. La retta passante per i punti $(3, 1), (1, 3)$ ha equazione: $x + y = 4$; allora, fissato $x \in [1, 3]$, si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \int_1^{4-x} \frac{1}{2}dy = \frac{3 - x}{2}\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove; analogamente $f_2(y) = \int_1^{4-y} \frac{1}{2}dx = \frac{3-y}{2}$, $y \in [1, 3]$, con $f_2(y) = 0$ altrove; pertanto $X$ e $Y$ sono ugualmente distribuiti, con
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \int_1^3 x \cdot \frac{3 - x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 = \cdots = \frac{5}{3}\,,$$

$$\mathbb{P}(XY) = \int_1^3 \int_1^{4-x} \frac{1}{2} xy\,dxdy = \frac{1}{4}\int_1^3 x[y^2]_1^{4-x} dx = \cdots = \frac{1}{4}\int_1^3 (x^3 - 8x^2 + 15x)dx = \cdots = \frac{8}{3}\,.$$

Allora: $Cov(X,Y) = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3} = -\frac{1}{9} < 0$; pertanto $X$ e $Y$ sono correlati negativamente.

5. $X_1, X_2, X_3$ hanno una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,2]$; allora, posto $(X_i \leq 1) = E_i$, si ha $P(E_i) = \frac{1}{2} = P(E_i^c), i = 1,2,3$. Pertanto, osservando che $(T \leq 1) = (X_1 \leq 1) \vee (X_2 \leq 1) \vee (X_3 \leq 1) = E_1 \vee E_2 \vee E_3$, sfruttando l'indipendenza stocastica e le formule di De Morgan si ottiene

$$\alpha = P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = \frac{7}{8}\,.$$

Inoltre, fissato $t \in [0,2]$ e indicando con $A_i$ l'evento $(X_i \leq t)$, risulta $P(A_i) = \frac{t}{2}$, $P(A_i^c) = 1 - \frac{t}{2} = \frac{2-t}{2}$, $i = 1,2,3$; quindi

$$P(T \leq t) = F_T(t) = P(A_1 \vee A_2 \vee A_3) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) = 1 - \frac{(2-t)^3}{8}\,.$$

Allora: $f_T(t) = F_T'(t) = \frac{3(2-t)^2}{8}$; $m_T = \mathbb{P}(T) = \int_0^2 t f_T(t)dt = \frac{3}{8}\int_0^2 (t^3 - 4t^2 + 4t)dt = \cdots = \frac{1}{2}$.

6. Ricordando che $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1$, $\lambda > 0$, si ha

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^x c e^{-x-y} dy = c\int_0^{+\infty} (e^{-x}\int_0^x e^{-y}dy)dx = c\int_0^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-x})dx =$$

$$= c\int_0^{+\infty} e^{-x}dx - \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx = c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} = 1\,;$$

pertanto: $c = 2$. Inoltre, per ogni $x > 0$, si ha

$$f_1(x) = \int_0^x 2e^{-x-y}dy = 2e^{-x}\int_0^x e^{-y}dy = 2e^{-x}(1 - e^{-x}) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}\,,$$

e, ricordando che $\int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda x}$, segue

$$S_1(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)dt = \int_x^{+\infty} (2e^{-t} - 2e^{-2t})dt = 2\int_x^{+\infty} e^{-t}dt - \int_x^{+\infty} 2e^{-2t}dt =$$

$= 2e^{-x} - e^{-2x}$. Allora: $h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{2e^{-x} - 2e^{-2x}}{2e^{-x} - e^{-2x}} = \frac{2e^x - 2}{2e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2e^x - 1}\,,\ x > 0\,.$

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_6$ sono scambiabili; quindi: $P(E_i^c E_j^c E_k^c) = P(E_1^c E_2^c E_3^c)$, per ogni sottoinsieme $\{i,j,k\} \subset \{1,\ldots,6\}$. Tizio vince il premio se e solo se le ultime 3 palline sono nere; ovvero: $A = E_4^c E_5^c E_6^c$; analogamente $B = E_1^c E_2^c E_3^c$, con $AB = \emptyset$. Allora

$$P(A) = P(B) = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c)P(E_3^c|E_1^c E_2^c) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{5}\,;$$

pertanto: $\alpha = P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5}$. Inoltre

$$\gamma = P(A\,|\,A \vee B) = \frac{P[A \wedge (A \vee B)]}{P(A \vee B)} = \frac{P(A \vee AB)}{P(A \vee B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} = \frac{1}{2}\,.$$