Probabilità e Statistica *(Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina - 16/1/2015)*
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Sia Q il quadrato di vertici i punti $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y)=k(x+y)$, per $(x,y)\in Q$, con $f(x,y)=0$ altrove. Calcolare la costante k e, indicando con m la previsione di X, la costante c tale che $P(m-c\leq X\leq m+c)=\frac{1}{2}$.

   $k=$ $\qquad\qquad$ $c=$

2. Da un'urna contenente 1 pallina bianca e 6 nere si effettuano 7 estrazioni senza restituzione (Tizio effettua le prime 3 estrazioni, Caio le ultime 3). Se uno dei due estrae la pallina bianca vince un premio. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i=1,\ldots,7$, A = *"Tizio vince il premio"*, B = *"Caio vince il premio"*, calcolare $P(A|A\vee B)$ e $P(B|A\vee B)$.

   $P(A|A\vee B)=$ $\qquad\qquad$ $P(B|A\vee B)=$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione e la funzione caratteristica del numero aleatorio $X=|A|-|B|$.

   $F(x)=$ $\qquad\qquad$ $\varphi(t)=$

4. Da un lotto L, contenente 3 pezzi buoni e 1 difettoso, si prelevano a caso 3 pezzi, che successivamente vengono esaminati uno dopo l'altro. Sia X il numero aleatorio di pezzi buoni fra i 3 prelevati dal lotto L. Supposto che i primi due pezzi esaminati siano entrambi buoni (evento A), calcolare la probabilità che i 3 pezzi siano tutti buoni (evento H) condizionata all'evento A.
   (*Nota: indicare con E_i l'evento "l'i-mo pezzo esaminato è buono", $i=1,2,3$*)

   $P(H|A)=$

5. Con riferimento all'esercizio 1, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, calcolare la mediana M del numero aleatorio Y.

   stoc. indip.? $\qquad\qquad$ $M=$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y)=e^{-x^2y}$, per $x\geq 1$, $y\geq 0$, con $f(x,y)=0$ altrove. Calcolare la funzione di rischio $h_1(x)$, per $x\geq 1$, la densità condizionata $f_2(y|x)$ e la previsione condizionata $\mathbb{P}(Y|x)$, per $x\geq 1$.

   $h_1(x)=$ $\qquad\qquad$ $f_2(y|x)=$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(Y|x)=$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale di parametri $m_0=\sigma_0=3$. Le componenti di un campione casuale $(X_1,\cdots,X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto quadratico medio $\sigma=1$. Posto $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, con $x_1+\cdots+x_n=3n$, siano m_n e σ_n la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$. Calcolare la probabilità p dell'evento $[(3-\sigma_n\leq\Theta\leq 3+\sigma_n)|\mathbf{x}]$ e stabilire per quali valori di n l'ampiezza dell'intervallo $[m_n-\sigma_n,m_n+\sigma_n]$ è minore di $\frac{1}{2}$.

   $p=$ $\qquad\qquad$ $n\in$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 16/1/2015.

1. Si ha: $\int\int_Q f(x,y)dxdy = k\int_0^2 dx\int_0^2 (x+y)dy = k\int_0^2(2x+2)dx = 8k = 1$; quindi $k=\frac{1}{8}$. Inoltre

   $$f_1(x) = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dy = \frac{1}{8}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{x+1}{4}\,, \quad F_1(x) = \int_0^x \frac{t+1}{4}\,dt = \frac{x^2}{8}+\frac{x}{4}\,, \quad 0\le x\le 2\,,$$

   da cui segue: $\mathbb{P}(X) = \int_0^2 x f_1(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2+x}{4}dx = \left[\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}\right]_0^2 = \frac{7}{6}$. Infine:

   $$P(m-c\le X\le m+c) = \int_{m-c}^{m+c}\frac{x+1}{4}\,dx = F_1(m+c)-F_1(m-c) = \cdots = \frac{c(m+1)}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

   per $c=\frac{1}{m+1}=\frac{6}{13}$.

2. Gli eventi sono scambiabili, con $P(E_i)=\frac{1}{7}$, $i=1,\ldots,7$, $E_iE_j=\emptyset$, per ogni $i\neq j$. Inoltre $P(A|A\vee B)=\frac{P(A)}{P(A\vee B)}$, $P(B|A\vee B)=\frac{P(B)}{P(A\vee B)}$, con

   $$P(A) = P(E_1\vee E_2\vee E_3) = \frac{3}{7} = P(E_5\vee E_6\vee E_7) = P(B)\,,\ P(A\vee B) = P(A)+P(B) = \frac{6}{7}\,,$$

   da cui segue: $P(A\,|\,A\vee B) = P(B\,|\,A\vee B) = \frac{1}{2}$.

3. Si hanno tre costituenti: $A=E_1\vee E_2\vee E_3\,,\quad B=E_5\vee E_6\vee E_7\,,\quad A^cB^c=E_4$; quindi $X\in\{-1,0,1\}$, con

   $$P(X=-1) = P(B) = \frac{3}{7} = P(A) = P(X=1)\,,\ \ P(X=0) = P(A^cB^c) = P(E_4) = \frac{1}{7}\,.$$

   Pertanto: $F(x)=0$, per $x<-1$; $F(x)=\frac{3}{7}$, per $-1\le x<0$; $F(x)=\frac{4}{7}$, per $0\le x<1$; $F(x)=1$, per $x\ge 1$. Inoltre

   $$\varphi(t) = \sum_{h=-1}^{1} p_h e^{ith} = \frac{3e^{-it}+1+3e^{it}}{7} = \cdots = \frac{1}{7}+\frac{6}{7}cos\,t\,.$$

4. Si ha $X\sim H(4,3,\frac{3}{4})$, con $X\in\{2,3\}$ e con

   $$P(X=2) = P(H^c) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}\,,\quad P(X=3) = P(H) = \frac{\binom{3}{3}\binom{1}{0}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{4}\,.$$

   Inoltre

   $$P(A|H) = P(E_1E_2|H) = 1\,,\ P(A|H^c) = P(E_1E_2|H^c) = P(E_1|H^c)P(E_2|E_1H^c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,.$$

   Allora: $P(A) = P(A|H)P(H)+P(A|H^c)P(H^c) = 1\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$; pertanto

   $$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A)} = \frac{1\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

5. Ricordiamo che $f_1(x) = \frac{x+1}{4}$, per $0 \le x \le 2$, con $f_1(x) = 0$ altrove. Inoltre

$$f_2(y) = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2+xy}{2}\right]_0^2 = \frac{y+1}{4}\,, 0 \le y \le 2\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove; pertanto $f_1 = f_2$. La condizione $\frac{1}{8}(x+y) = \frac{x+1}{4} \cdot \frac{y+1}{4}$, $\forall\,(x,y) \in Q$, non è soddisfatta, ovvero $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$; pertanto X e Y non sono stocasticamente indipendenti. Infine

$$\int_0^M f_2(y)dy = \int_0^M \frac{y+1}{4}dy = \frac{M^2}{8} + \frac{M}{4} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui, tenendo conto che $0 < M < 2$, segue: $M = \sqrt{5} - 1$.

6. Ricordando che $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1$, $\forall\,\lambda > 0$, per ogni fissato $x \ge 1$ si ha

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y}dy = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2 y}dy = \frac{1}{x^2}\,;$$

allora: $S_1(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Pertanto $h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$, $x \ge 1$. Inoltre, fissato $x \ge 1$, per ogni $y \ge 0$ si ha $f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = x^2 e^{-x^2 y}$; cioè $Y|x \sim Exp(x^2)$. Infine, ricordando che $\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$, segue: $\mathbb{P}(Y|x) = \int_0^{+\infty} y f_2(y|x)dy = \int_0^{+\infty} yx^2 e^{-x^2 y}dy = \frac{1}{x^2}$, per ogni fissato $x \ge 1$.

7. Si ha $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}$, con $\bar{\mathbf{x}} = 3 = m_0$; quindi: $m_n = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2}\cdot\bar{\mathbf{x}}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}} = 3 = m_0$; inoltre

$$\frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{9} + n = \frac{1+9n}{9}\,, \qquad \sigma_n = \frac{3}{\sqrt{1+9n}}\,.$$

Allora

$$p = P[(3-\sigma_n \le \Theta \le 3+\sigma_n)|\mathbf{x}] = \Phi_{m_n,\sigma_n}(3+\sigma_n) - \Phi_{m_n,\sigma_n}(3-\sigma_n) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \;\simeq\; 0.6826\,.$$

Infine, l'ampiezza dell'intervallo $[m_n - \sigma_n, m_n + \sigma_n]$ è $2\sigma_n = \frac{6}{\sqrt{1+9n}} < \frac{1}{2}$ per $n \ge 16$.