Probabilità e Statistica *(Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina* - 27/3/2015)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. La densità di probabilità di un n.a. continuo non negativo X è $f(x) = c\sqrt{x}\, e^{-x\sqrt{x}}$, per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante c e, per ogni $x > 0$, la funzione di sopravvivenza $S(x)$ e la funzione di rischio $h(x)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $S(x) =$ $\qquad\qquad$ $h(x) =$

2. Da un'urna, contenente sei palline, di cui due numerate con il numero 0, due con il numero 1 e due con il numero 2, si effettuano due estrazioni senza restituzione. Indicando con X il risultato della prima estrazione e con Y il risultato della seconda estrazione, sia $Z = X+Y$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(Z \leq 0)$ e la probabilità α dell'evento condizionato $(X = 0 \,|\, Z \leq 1)$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del n.a. Z.

   $\varphi_Z(t) =$

4. Dati due n. a. X e Y, incorrelati e con distribuzione normale di parametri $m = \sigma = 1$, posto $U = 3X + Y$, $V = X - 3Y$, calcolare le varianze di U e V e il loro coefficiente di correlazione ρ.

   $Var(U) =$ $\qquad\qquad$ $Var(V) =$ $\qquad\qquad$ $\rho =$

5. Dati tre eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_1E_2) = \frac{5}{18}, P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{6}$, calcolare $P(E_1^c \,|\, E_2)$ e $P(E_1^c \vee E_2^c \,|\, E_2E_3)$.

   $P(E_1^c \,|\, E_2) =$ $\qquad\qquad$ $P(E_1^c \vee E_2^c \,|\, E_2E_3) =$

6. Sia T il triangolo di vertici i punti $(a, 0), (0, a), (a, a)$, con $a > 0$. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{x+y}{a^2}$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e stabilire se $P(X \leq Y) = P(X > Y)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $P(X \leq Y) = P(X > Y)$?

7. Con riferimento all'esercizio 6, determinare la densità e la funzione di ripartizione di X.

   $f_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $F_1(x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr., Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 27/3/2015.

1. Posto $t = x\sqrt{x}$, si ha $dt = \frac{3}{2}\sqrt{x}dx$; allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = c\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}c\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{2}{3}\,c = 1\,;$$

pertanto: $c = \frac{3}{2}$. Inoltre, fissato $x > 0$, si ha

$$S(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt = \int_x^{+\infty} \frac{3}{2}\sqrt{t}\, e^{-t\sqrt{t}}dt = [-e^{-t\sqrt{t}}]_x^{+\infty} = e^{-x\sqrt{x}}\,.$$

Infine: $h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\, e^{-x\sqrt{x}}}{e^{-x\sqrt{x}}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

2. Si ha $(Z \leq 0) = (Z = 0) = (X = 0, Y = 0)$; pertanto

$$P(Z \leq 0) = P(Z = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0\,|\,X = 0) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}\,.$$

Inoltre: $(Z \leq 1) = (Z = 0)\vee(Z = 1) = (X = 0, Y = 0)\vee(X = 0, Y = 1)\vee(X = 1, Y = 0)$, con

$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1\,|\,X = 0) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15}\,,$$

$$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0\,|\,X = 1) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15}\,;$$

pertanto: $\alpha = P(X = 0\,|\,Z \leq 1) = \frac{P(X=0,\, Z\leq 1)}{P(Z\leq 1)} = \frac{P[(X=0,Y=0)\vee(X=0,Y=1)]}{P(Z\leq 1)} =$

$$= \frac{P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1)}{P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0)} = \frac{\frac{1}{15} + \frac{2}{15}}{\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15}} = \frac{3}{5}\,.$$

3. Si ha $Z \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, con

$$P(Z = 0) = \frac{1}{15},\ P(Z = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{4}{15}\,;$$

inoltre

$$P(Z = 2) = P(X = 0, Y = 2)+P(X = 1, Y = 1)+P(X = 2, Y = 0) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{3}\,;$$

$$P(Z = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15}\,;$$

$$P(Z = 4) = P(X = 2, Y = 2) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \sum_h p_h e^{itz_h} = \frac{1 + 4e^{it} + 5e^{2it} + 4e^{3it} + e^{4it}}{15}\,.$$

4. Si ha $Var(X) = Var(Y) = 1, Cov(X,Y) = 0$; quindi $Var(U) = 9Var(X) + Var(Y) = Var(X) + 9Var(Y) = Var(V) = 10$. Inoltre, osservando che $Cov(aX, bY) = abCov(X,Y)$, segue

$$Cov(U,V) = Cov(3X+Y, X-3Y) = Cov(3X,X)+Cov(3X,-3Y)+Cov(Y,X)+Cov(Y,-3Y) =$$

$$= 3Cov(X,X) - 3Cov(Y,Y) = 3Var(X) - 3Var(Y) = 0.$$ Quindi: $\rho = 0$.

5. Dall'ipotesi di scambiabilità segue $P(E_2) = P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2E_3) = P(E_1E_2) = \frac{5}{18}$. Allora, ricordando che $P(A^c|H) = 1 - P(A|H)$ e che $A^c \vee B^c = (AB)^c$, segue

$$P(E_1^c \,|\, E_2) = 1 - P(E_1 \,|\, E_2) = 1 - \frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)} = 1 - \frac{\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}\,;$$

$$P(E_1^c \vee E_2^c \,|\, E_2E_3) = 1 - P(E_1E_2 \,|\, E_2E_3) = 1 - \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_2E_3)} = 1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{2}{5}\,.$$

6. L'equazione della retta passante per i punti $(a,0), (0,a)$ è $x + y = a$; inoltre, si ha

$$\int_0^a \int_{a-x}^a \frac{x+y}{a^2}\, dxdy = \cdots = \frac{1}{a^2}\int_0^a \left(\frac{x^2}{2} + ax\right) dx = \cdots = \frac{2a}{3} = 1\,;$$

pertanto $a = \frac{3}{2}$. Inoltre, l'evento $(X > Y)$ è vero se e solo se (X,Y) appartiene al triangolo D di vertici i punti $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{2}, 0), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$; quindi

$$P(X > Y) = \int\int_D f(x,y)dxdy = \frac{4}{9}\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} dx \int_{\frac{3}{2}-x}^{x} (x+y)\, dy = \cdots = \frac{4}{9}\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \left(2x^2 - \frac{9}{8}\right) dx = \cdots = \frac{1}{2}\,.$$

Allora, dalla relazione $P(X \leq Y) + P(X > Y) = 1$, segue: $P(X \leq Y) = P(X > Y)$.

7. Per $x \in [0, \frac{3}{2}]$, si ha

$$f_1(x) = \frac{4}{9}\int_{\frac{3}{2}-x}^{\frac{3}{2}} (x+y)dy = \cdots = \frac{2x^2 + 6x}{9}\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Inoltre, $F_1(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F_1(x) = 1$ per $x \geq \frac{3}{2}$. Infine, per $0 < x < \frac{3}{2}$, si ha

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{2t^2 + 6t}{9} dt = \cdots = \frac{2x^3 + 9x^2}{27}\,.$$