Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina* - 6/11/2015)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un lotto di 20 componenti, contenente 16 pezzi buoni e 4 difettosi, si effettuano 4 estrazioni con restituzione. Calcolare la probabilità α che esattamente tre volte si ottenga un pezzo buono. Sia inoltre X il numero aleatorio di componenti buoni ottenuti nelle 4 estrazioni; indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X, calcolare la probabilità β dell'evento $(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0,1] \cup [3,4]$ è $f(x) = \frac{1}{4}$, per $x \in [0,1]$, $f(x) = c$, per $x \in [3,4]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante c, la previsione di X e la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $c =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $F(x) =$

3. Da un gruppo di 6 studenti, dei quali solo 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono presi a caso 2, ad uno dei quali scelto a caso viene sottoposto il quesito. Definiti gli eventi $H_r =$ *"r dei 2 studenti sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$, $A =$ *"lo studente scelto a caso sa risolvere il quesito"*, calcolare $P(A)$ e stabilire se H_2 ed A sono correlati.

   $P(A) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $Correlazione$?

4. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta del vettore (X, Y) è $f(x, y) = c(x + y)$, per $(x, y) \in (0, 2] \times (0, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante c; inoltre, posto $A = (X \leq Y), B = (X + Y \leq 2)$, stabilire se $P(A|B) = P(B|A)$.

   $c =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(A|B) = P(B|A)$?

5. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = \frac{x}{9} e^{-\frac{x^2}{18}}$ per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove, sia $Y = \frac{X^2}{9}$. Calcolare la previsione di X e la funzione di rischio di Y.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h_Y(y) =$

6. Utilizzando due urne distinte, ciascuna contenente 3 palline bianche e 1 nera, Tizio e Caio effettuano ognuno 2 estrazioni senza restituzione. Siano X e Y i numeri aleatori di palline bianche ottenuti da Tizio e Caio. Posto $Z = X - Y$, calcolare: (i) $Var(Z)$; (ii) $\varphi_Z(t)$.

   $Var(Z) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

7. Da un lotto, contenente 6 pezzi buoni e 2 difettosi, si effettuano 4 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ "l'i-mo pezzo estratto è difettoso", $i = 1, \ldots, 4$, calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(E_1 E_3 \,|\, E_3 \vee E_4)$. Posto inoltre $X = |E_1| + |E_3|$ e indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X, calcolare la probabilità $p = P(m - 2\sigma < X < m + \sigma)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 6/11/2015.

1. Si ha $X \sim B(n,p)$, con $n=4$, $p=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$, $X \in \{0,1,2,3,4\}$. Pertanto $\alpha = P(X=3) = \binom{4}{3}(\frac{4}{5})^3(\frac{1}{5}) = \frac{256}{625} = 0.4096$; inoltre
$$m = I\!P(X) = np = 4 \cdot \frac{4}{5} = 3.2\,; \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{4}{5} = 0.8\,.$$
Allora: $m-\sigma = 2.4$, $m+\sigma = 4$; pertanto: $\beta = P(X \in \{3,4\}) = P(X=3) + P(X=4)$, con $P(X=4) = \binom{4}{4}(\frac{4}{5})^4 = (\frac{4}{5})^4 = 0.4096$; quindi: $\beta = 0.4096 + 0.4096 = 0.8192$.

2. Si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{4}dx + \int_3^4 c\,dx = \frac{1}{4} + c = 1$; pertanto $c = \frac{3}{4}$. Inoltre
$$\mathbb{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{4}\,dx + \int_3^4 \frac{3}{4}\,x\,dx = \cdots = \frac{11}{4}\,.$$
Infine, $F(x) = 0$, per $x \le 0$; $F(x) = \int_0^x \frac{1}{4}dt = \frac{x}{4}$, per $x \in (0,1]$; $F(x) = \frac{1}{4}$, per $x \in (1,3]$; $F(x) = \frac{1}{4} + \int_3^x \frac{3}{4}dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x-3) = \frac{3}{4}\,x - 2$, per $x \in (3,4)$; $F(x) = 1$, per $x \ge 4$.

3. Si ha $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{4}{2-r}}{\binom{6}{2}}$, $r = 0,1,2$; quindi: $P(H_0) = \frac{6}{15}$, $P(H_1) = \frac{8}{15}$, $P(H_2) = \frac{1}{15}$. Inoltre $P(A|H_0) = 0\,,\ \ P(A|H_1) = \frac{1}{2}\,,\ \ P(A|H_2) = 1$; pertanto
$$P(A) = \sum_{r=0}^{2} P(A|H_r)P(H_r) = 0 \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} + 1 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{3}\,.$$
Infine, osservando che $P(A|H_2) = 1 > \frac{1}{3} = P(A)$, segue che H_2 ed A sono correlati positivamente; infatti, simmetricamente, si ha
$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} > \frac{1}{15} = P(H_2)\,.$$

4. Si ha
$$\int_0^2 dx \int_0^2 c(x+y)dy = c\int_0^2 (2x+2)dx = 8c = 1\,,$$
da cui segue: $c = \frac{1}{8}$. Inoltre $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}\,,\ P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, con
$$P(AB) = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} \frac{1}{8}(x+y)dy = \cdots = \frac{1}{8}\int_0^1 (2-2x^2)dx = \frac{1}{6}\,,$$
$$P(A) = \int_0^2 dx \int_x^2 \frac{1}{8}(x+y)dy = \cdots = \frac{1}{8}\int_0^2 (-\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2)dx = \cdots = \frac{1}{2}\,.$$
$$P(B) = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \frac{1}{8}(x+y)dy = \cdots = \frac{1}{8}\int_0^2 (-\frac{1}{2}x^2 + 2)dx = \cdots = \frac{1}{3} \ < \ \frac{1}{2} = P(A)\,.$$

Pertanto: $P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = P(A)$, $P(B|A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(B)$. Gli eventi A e B sono stocasticamente indipendenti e non equiprobabili; quindi $A|B$ e $B|A$ non sono equiprobabili.

5. Osserviamo che, se $Z \sim N_{0,3}$, allora $\mathbb{P}(Z) = 0$, $Var(Z) = 9 = \mathbb{P}(Z^2)$; inoltre
$$\mathbb{P}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{18}} dz = 2\int_0^{+\infty} z^2 \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{18}} dz = \frac{6}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{z^2}{9} e^{-\frac{z^2}{18}} dz = 9\,;$$
pertanto: $\int_0^{+\infty} \frac{z^2}{9} e^{-\frac{z^2}{18}} dz = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{9} e^{-\frac{x^2}{18}} dx = \mathbb{P}(X) = \frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$. Inoltre, per ogni fissato $y \geq 0$, si ha
$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(X > 3\sqrt{y}) = \int_{3\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{x}{9} e^{-\frac{x^2}{18}} dx = [-e^{-\frac{x^2}{18}}]_{3\sqrt{y}}^{+\infty} = e^{-\frac{y}{2}}\,;$$
ovvero Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Pertanto: $h_Y(y) = \frac{1}{2}$ per $y \geq 0$, con $h_Y(y) = 0$ altrove.

6. Si ha $X \sim H(4, 2, \frac{3}{4})$, $Y \sim H(4, 2, \frac{3}{4})$, con X, Y stocasticamente indipendenti; pertanto
$$Var(X) = Var(Y) = npq(1 - \frac{n-1}{N-1}) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{4}\,; \quad Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{2}\,.$$
Inoltre $X \in \{1, 2\}$, $Y \in \{1, 2\}$, con
$$P(X = 2) = P(Y = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,, \quad P(X = 1) = P(Y = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,;$$
allora: $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \frac{1}{2}\, e^{it} + \frac{1}{2}\, e^{2it}$. Pertanto, dall'indipendenza stocastica di X e Y, osservando che $\varphi_{-Y}(t) = \mathbb{P}(e^{it(-Y)}) = \mathbb{P}(e^{i(-t)Y}) = \varphi_Y(-t)$, segue
$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = \left(\frac{1}{2}\, e^{it} + \frac{1}{2}\, e^{2it}\right)\left(\frac{1}{2}\, e^{-it} + \frac{1}{2}\, e^{-2it}\right) = \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\, e^{-it} + \frac{1}{4}\, e^{it}\,.$$
In alternativa: $(X, Y) \in \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$, *con* $P(X = h, Y = k) = P(X = h)P(Y = k) = \frac{1}{4}$, *per ogni* h, k; *inoltre* $Z \in \{-1, 0, 1\}$, *con* $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$, $P(Z = -1) = P(Z = 1) = \frac{1}{4}$, *da cui segue:* $\varphi_Z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{4}e^{it}$.

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_4$ sono scambiabili; in particolare sono equiprobabili, con
$$P(E_i) = P(E_1) = \frac{1}{4}\,, \ P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = \frac{1}{28}\,, \ E_iE_jE_k = \emptyset\,;$$
inoltre $P(E_3^cE_4^c) = P(E_1^cE_2^c) = \frac{15}{28}$. Allora
$$\alpha = \frac{P[(E_1E_3) \wedge (E_3 \vee E_4)]}{P(E_3 \vee E_4)} = \frac{P(E_1E_3)}{1 - P(E_3^cE_4^c)} = \frac{\frac{1}{28}}{1 - \frac{15}{28}} = \frac{1}{13}\,.$$
Inoltre $X \in \{0, 1, 2\}$, con $X \sim H(8, 2, \frac{1}{4})$; quindi $\mathbb{P}(X) = np = \frac{1}{2}$, $\sigma = \sqrt{npq(1 - \frac{n-1}{N-1})} = \sqrt{\frac{9}{28}} \simeq 0.5669$, da cui segue: $m - 2\sigma = \frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{9}{28}} < 0$, $m + \sigma = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{28}} \in (1, 2)$. Allora l'evento $(m - 2\sigma \leq X \leq m + \sigma)$ coincide con l'evento $(X < 2)$; quindi
$$p = P(m - 2\sigma < X < m + \sigma) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1 - P(X = 2) = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{6}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{27}{28}\,.$$