Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina* - 12/2/2016)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Date due urne U e V, ciascuna contenente 2 palline bianche e 3 nere, da ogni urna si tolgono a caso quattro palline. Sia X il numero aleatorio di palline bianche estratte da U ed Y il numero aleatorio di palline bianche estratte da V. Calcolare $Cov(-X+Y, X-Y)$; inoltre, calcolare la previsione di X^2+Y^2 e la funzione di ripartizione di $Z = X+Y$.

   $Cov(-X+Y, X-Y) =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X^2+Y^2) =$ $\qquad$ $F(z) =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0,4]$ è $f(x) = cx$, per $x \in [0,4]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante c; inoltre, fissato $x_0 \in (0,2)$, determinare (in funzione di x_0) il valore x_1 tale che $F(x_1) = 4F(x_0)$.

   $c =$ $\qquad$ $x_1 =$

3. Da un gruppo di 6 studenti, dei quali solo 2 sanno risolvere un certo quesito, viene estratto a caso un sottoinsieme di 3 studenti. Successivamente, (con estrazioni a caso senza restituzione), ad ognuno dei 3 studenti del sottoinsieme viene sottoposto il quesito. Definiti gli eventi $H_r =$ *"r dei 3 studenti sanno risolvere il quesito"*, $r = 0,1,2$, $A_i =$ *"l'i-mo studente scelto a caso sa risolvere il quesito"*, calcolare $P(A_i), i = 1,2,3$, $P(H_2 \,|\, A_1)$ e $P(A_1 \,|\, A_2)$.

   $P(A_i) =$ $\qquad$ $P(H_2 \,|\, A_1) =$ $\qquad$ $P(A_1 \,|\, A_2) =$

4. Dati 3 numeri aleatori X, con distribuzione normale standard, $Y = 2X+1$, $Z = 2X-1$, calcolare: (i) $\alpha = P(Y > 3 \,|\, Z > -3)$; (ii) $\beta = P(Y+Z \leq 4 \,|\, Y+Z \leq 8)$.

   $\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$

5. La densità congiunta $f(x,y)$ di un vettore aleatorio (X,Y) è costante per $(x,y) \in T$, dove T è il triangolo di vertici i punti $(1,3), (3,3), (3,1)$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, calcolare la funzione di ripartizione di X e la previsione di XY.

   Indip. stocast. ? $\qquad$ $F_1(x) =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(XY) =$

6. Un sistema S è composto da due dispositivi in serie, con rispettive durate aleatorie fino al guasto X e Y, stocasticamente indipendenti e con funzioni di rischio $h_1(x) = 2$, $\forall x > 0$, e $h_2(y) = 2$, $\forall y > 0$. Calcolare la funzione di ripartizione e la funzione di rischio del tempo aleatorio Z di durata fino al guasto di S.

   $F_Z(z) =$ $\qquad$ $h_Z(z) =$

7. Da un'urna contenente quattro palline, tre delle quali numerate con il numero 1 e una con il numero 3, si effettuano due estrazioni senza restituzione ottenendo dei risultati aleatori X e Y. Calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = Y - X$.

   $\varphi_Z(t) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 12/2/2016.

1. Si ha $X \in \{1,2\}$, $Y \in \{1,2\}$, con X e Y stocasticamente indipendenti e con

$$P(X=1) = P(Y=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{3}}{\binom{5}{4}} = \frac{2}{5}, \quad P(X=2) = P(Y=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{2}}{\binom{5}{4}} = \frac{3}{5}.$$

X ed Y hanno la stessa distribuzione ipergeometrica $H(5,4,\frac{2}{5})$, con $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \frac{8}{5}$, $Var(X) = Var(Y) = \frac{6}{25}$, $Cov(X,Y) = 0$; pertanto, osservando che

$$Cov(X-Y,X-Y) = Var(X-Y) = Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y) = Var(X)+Var(Y) = \frac{12}{25},$$

si ha: $Cov(-X+Y,X-Y) = -Cov(X-Y,X-Y) = -\frac{12}{25}$. Inoltre

$$\mathbb{P}(X^2+Y^2) = \mathbb{P}(X^2)+\mathbb{P}(Y^2) = Var(X)+[\mathbb{P}(X)]^2+Var(Y)+[\mathbb{P}(Y)]^2 = \frac{28}{5}.$$

Infine: $Z \in \{2,3,4\}$, con $P(Z=2) = P(X=1,Y=1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$, $P(Z=4) = = P(X=2,Y=2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$, $P(Z=3) = \frac{12}{25}$. Allora: $F(z) = 0$, per $z < 2$; $F(z) = \frac{4}{25}$, per $2 \le z < 3$; $F(z) = \frac{16}{25}$, per $3 \le z < 4$; $F(z) = 1$, per $z \ge 4$.

2. Si ha: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 cx dx = \frac{c}{2}[x^2]_0^4 = 8c = 1$, da cui segue: $c = \frac{1}{8}$. Inoltre, fissato $x_0 \in (0,2)$, si ha: $F(x_0) = \frac{x_0^2}{16}$, $F(x_1) = \frac{x_1^2}{16} = 4\cdot\frac{x_0^2}{16}$, da cui segue: $x_1 = 2x_0 \in (0,4)$.

3. Si ha $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{4}{3-r}}{\binom{6}{3}}$, $r = 0,1,2$; quindi: $P(H_0) = \frac{1}{5}$, $P(H_1) = \frac{3}{5}$, $P(H_2) = \frac{1}{5}$. Inoltre, gli eventi A_1, A_2, A_3 sono scambiabili, con $P(A_1|H_0) = 0$, $P(A_1|H_1) = \frac{1}{3}$, $P(A_1|H_2) = \frac{2}{3}$; pertanto

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \sum_{r=0}^{2} P(A_1|H_r)P(H_r) = 0\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{3}.$$

Inoltre: $P(H_2\,|\,A_1) = \frac{P(A_1|H_2)P(H_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$. Infine, osservando che

$$P(A_1A_2|H_0) = 0, \quad P(A_1A_2|H_1) = 0, \quad P(A_1A_2|H_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

si ottiene: $P(A_1A_2) = \sum_{r=0}^{2} P(A_1A_2|H_r)P(H_r) = P(A_1A_2|H_2)P(H_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, da cui segue: $P(A_1\,|\,A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$; ($A_1$ e A_2 sono correlati negativamente).

4. Si ha

$$\alpha = P(2X{+}1 > 3\,|\,2X{-}1 > -3) = P(X > 1\,|\,X > -1) = \frac{P(X>1)}{P(X>-1)} = \frac{1-P(X\le 1)}{1-P(X\le -1)} =$$

$$= \frac{1-\Phi(1)}{1-\Phi(-1)} = \frac{1-\Phi(1)}{\Phi(1)} \simeq \frac{1-0.8413}{0.8413} \simeq 0.1886\,.$$

$$\beta = P(4X\le 4\,|\,4X\le 8) = P(X\le 1\,|\,X\le 2) = \frac{P(X\le 1)}{P(X\le 2)} = \frac{\Phi(1)}{\Phi(2)} \simeq \frac{0.8413}{0.9772} \simeq 0.8609\,.$$

5. L'area di T è 2, pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{2}$, $(x,y)\in T$, con $f(x,y)=0$ altrove. Allora, osservando che l'equazione della retta passante per i punti $(1,3),(3,1)$ è $x+y=4$, segue

$$f_1(x) = \int_{4-x}^{3} \frac{1}{2}dy = \frac{x-1}{2}\,,\ x\in[1,3]\,,\quad f_2(y) = \int_{4-y}^{3} \frac{1}{2}dx = \frac{y-1}{2}\,,\ y\in[1,3]\,,$$

con $f_1(x)=0$, $f_2(y)=0$ altrove. Essendo $f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$, X e Y non sono stocasticamente indipendenti. Inoltre: $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt = 0$, per $x\le 1$; $F_1(x) = \int_1^x \frac{t-1}{2}dt = \frac{(x-1)^2}{4}$, per $x\in(1,3)$; $F_1(x)=1$, per $x\ge 3$. Infine

$$\mathbb{P}(XY) = \int\int_T xyf(x,y)dxdy = \int_1^3 dx\int_{4-x}^{3}\frac{1}{2}xydy = \cdots = -\frac{1}{4}\int_1^3(7x-8x^2+x^3)dx = \cdots = \frac{16}{3}\,.$$

6. Si ha

$$f_1(x) = h_1(x)e^{-\int_0^x h_1(t)dt} = \cdots = 2e^{-2x}\,,\ x\ge 0\,;\qquad f_2(y) = \cdots = 2e^{-2y}\,,\ y\ge 0\,;$$

ovvero: $X\sim Exp(2)$, $Y\sim Exp(2)$. Essendo $Z = min\{X,Y\}$, per ogni $z\ge 0$ si ha

$$S_Z(z) = P(Z>z) = P(X>z,Y>z) = P(X>z)P(Y>z) = e^{-2z}e^{-2z} = e^{-4z}\,,$$

da cui segue: $F_Z(z) = 1-S_Z(z) = 1-e^{-4z}$, $z\ge 0$. Inoltre: $f_Z(z) = -S'_Z(z) = 4\,e^{-4z}$, ovvero $Z\sim Exp(4)$. Allora

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4e^{-4z}}{e^{-4z}} = 4\,,\quad z\ge 0\,.$$

7. Si ha $(X,Y)\in\{(1,1),(1,3),(3,1)\}$, $Z\in\{-2,0,2\}$, con

$$(Z=-2) = (X=3,Y=1)\,,\quad (Z=0) = (X=1,Y=1)\,,\quad (Z=2) = (X=3,Y=1)\,,$$

$$P(X=3,Y=1) = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}\,,\ P(X=1,Y=1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,,\ P(X=1,Y=3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\,.$$

$$P(Z=-2) = \frac{1}{4}\,,\ P(Z=0) = \frac{1}{2}\,,\ P(Z=2) = \frac{1}{4}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_Z(t) = \sum_h p_h e^{ith} = \frac{e^{-2it}+2+e^{2it}}{4} = \frac{1+cos\,2t}{2}\,.$$