**Probabilit e Statistica** (*Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina* - 15/1/2016)
*(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)*

1. Date due urne $U$ e $V$, ciascuna contenente 4 palline bianche e 1 nera, da ogni urna si tolgono a caso due palline. Sia $X$ il numero aleatorio di palline bianche estratte da $U$ ed $Y$ il numero aleatorio di palline bianche estratte da $V$. Posto $Z = Y - X$, calcolare la previsione, la varianza e la funzione di ripartizione di $Z$.

   $\mathbb{P}(Z) =$ $\qquad$ $Var(Z) =$ $\qquad$ $F(z) =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, 2]$ è $f(x) = -x + 1$, per $x \in [0, 1]$, $f(x) = x - 1$, per $x \in (1, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ e i valori $x_1, x_2$ tali che gli eventi $(X \leq x_1), (x_1 < X \leq x_2), (X > x_2)$ sono ugualmente probabili.

   $F(x) =$ $\qquad$ $x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

3. Da un gruppo di 5 studenti, dei quali solo 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono presi a caso 3, ad uno dei quali scelto a caso viene sottoposto il quesito. Definiti gli eventi $H_r =$ *"r dei 3 studenti sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$, $A =$ *"lo studente scelto a caso sa risolvere il quesito"*, calcolare $P(A)$ e stabilire se $H_2$ ed $A$ sono correlati.

   $P(A) =$ $\qquad$ $Correlazione?$

4. Due veicoli, a partire da un certo istante, si mettono in movimento con velocità aleatorie (in $km/h$) $X$ e $Y$. La densità congiunta di $(X, Y)$ è $f(x, y) = e^{-x-ay}$, con $a > 0$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $a$; inoltre, posto $Z = Y - X$ e fissato un valore $z \geq 0$, calcolare la probabilità $p = P(Z > z)$ e la probabilità condizionata $\gamma = P(Z > z \,|\, Z > 0)$.

   $a =$ $\qquad$ $p =$ $\qquad$ $\gamma =$

5. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove, sia $Y = X^2$. Calcolare la previsione di $X$, la funzione di sopravvivenza di $Y$ e la funzione di rischio di $T = 2Y$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad$ $S_Y(y) =$ $\qquad$ $h_T(t) =$

6. L'attività di un operatore finanziario comporta un'entrata aleatoria $X$ ed un'uscita aleatoria $Y$, con $X, Y$ stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale, di parametri $m_X = 4, m_Y = 2, \sigma_X = 1, \sigma_Y = \frac{1}{2}$. Calcolare la funzione caratteristica del guadagno complessivo $Z = X - Y$ e la probabilità $p$ dell'evento condizionato $(Z > 2 + \sqrt{5} \,|\, Z > 2 + \frac{\sqrt{5}}{2})$.
   (*ricordiamo che la funzione caratteristica di una distribuzione* $N_{m,\sigma}$ è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$).

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad$ $p =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio $\Theta$ è normale con parametri $m_0 = 1$, $\sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_{24})$, subordinatamente ad ogni fissato valore $\theta$ di $\Theta$, hanno una distribuzione normale con valor medio $\theta$ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{24})$, con $x_1 + \cdots + x_{24} = 12$, calcolare il valore $c$ tale che $P(\frac{25}{49} - c \leq \Theta \leq \frac{25}{49} + c \mid \mathbf{x}) = 2\Phi(2) - 1$.

   $c =$

**Probabilità e Statistica** (Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 15/1/2016.*

1. Si ha $X \in \{1,2\}$, $Y \in \{1,2\}$, con $X$ e $Y$ stocasticamente indipendenti e con

$$P(X=1) = P(Y=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}\,, \quad P(X=2) = P(Y=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{1}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}\,.$$

$X$ ed $Y$ hanno la stessa distribuzione ipergeometrica $H(5,2,\frac{4}{5})$, con $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \frac{8}{5}$, $Var(X) = Var(Y) = \frac{6}{25}$, $Cov(X,Y) = 0$; pertanto: $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X) = 0$, $Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = \frac{12}{25}$. Inoltre, $Z \in \{-1,0,1\}$, con

$$P(Z=-1) = P(X=1, Y=2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25} = P(X=2, Y=1) = P(Z=1), \quad P(Z=0) = \frac{13}{25}\,.$$

Allora: $F(z) = 0$, per $z < -1$; $F(z) = \frac{6}{25}$, per $-1 \leq z < 0$; $F(z) = \frac{19}{25}$, per $0 \leq z < 1$; $F(z) = 1$, per $z \geq 1$.

2. Si ha $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = \int_0^x (-t+1)dt = -\frac{x^2}{2} + x$, per $x \in (0,1]$, $F(x) = \int_0^1 (-t+1)dt + \int_1^x (t-1)dt = \frac{x^2}{2} - x + 1$, per $x \in (1,2]$, $F(x) = 1$, per $x \geq 2$. Inoltre, gli eventi $(X \leq x_1), (x_1 < X \leq x_2), (X > x_2)$ formano una partizione ed essendo ugualmente probabili hanno tutti probabilità $\frac{1}{3}$. Osservando che $F(x_1) = \frac{1}{3}$, $F(1) = \frac{1}{2}$, $F(x_2) = \frac{2}{3}$, segue $x_1 \in (0,1), x_2 \in (1,2)$, con

$$P(X \leq x_1) = F(x_1) = -\frac{x_1^2}{2} + x_1 = \frac{1}{3} = P(X > x_2) = 1 - F(x_2) = 1 - \left(\frac{x_2^2}{2} - x_2 + 1\right) = -\frac{x_2^2}{2} + x_2\,,$$

da cui si ottiene: $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Si ha $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{3}{3-r}}{\binom{5}{3}}$, $r = 0,1,2$; quindi: $P(H_0) = \frac{1}{10}$, $P(H_1) = \frac{6}{10}$, $P(H_2) = \frac{3}{10}$. Inoltre $P(A|H_0) = 0$, $P(A|H_1) = \frac{1}{3}$, $P(A|H_2) = \frac{2}{3}$; pertanto

$$P(A) = \sum_{r=0}^{2} P(A|H_r)P(H_r) = 0 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{2}{5}\,.$$

Infine, osservando che $P(A|H_2) = \frac{2}{3} > \frac{2}{5} = P(A)$, segue che $H_2$ ed $A$ sono correlati positivamente; infatti, simmetricamente, si ha

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} > \frac{3}{10} = P(H_2)\,.$$

4. Si ha: $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x-ay}dy = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-x}[-e^{-ay}]_0^{+\infty}dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{a} = 1$; pertanto $a = 1$. Inoltre, osservando che $(Z > z) = (Y > X + z) = [(X,Y) \in A]$, dove $A$ è l'angolo contenuto nel primo quadrante di vertice il punto $(0,z)$, delimitato dall'asse $y$ e dalla retta $y = x + z$, si ha

$$p = P(Z > z) = P(Y > X + z) = \int\int_A f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} dx \int_{x+z}^{+\infty} e^{-x-y}dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_{x+z}^{+\infty} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-x-z} dx = \frac{e^{-z}}{2} \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx = \frac{e^{-z}}{2} .$$

Infine: $\gamma = P(Z > z \,|\, Z > 0) = \frac{P(Z>z, Z>0)}{P(Z>0)} = \frac{P(Z>z)}{P(Z>0)} = \frac{\frac{e^{-z}}{2}}{\frac{1}{2}} = e^{-z}$.

5. Osserviamo che, se $Z \sim N_{0,1}$, allora $\mathbb{P}(Z) = 0$, $Var(Z) = 1 = \mathbb{P}(Z^2)$; inoltre

$$\mathbb{P}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_0^{+\infty} z^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 ;$$

pertanto: $\int_0^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mathbb{P}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Inoltre, per ogni fissato $y \geq 0$, si ha

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(X > \sqrt{y}) = \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_{\sqrt{y}}^{+\infty} = e^{-\frac{y}{2}} ; \quad \left(Y \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)\right) .$$

Infine, per ogni fissato $t \geq 0$, si ha: $S_T(t) = P(T > t) = P\left(Y > \frac{t}{2}\right) = S_Y\left(\frac{t}{2}\right) = e^{-\frac{t}{4}}$. Allora $T$ ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{4}$. Pertanto: $h_T(t) = \frac{1}{4}$ per $t \geq 0$, con $h_T(t) = 0$ altrove.

6. Si ha: $\mathbb{P}(Z) = m_Z = \mathbb{P}(X-Y) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(Y) = m_X - m_Y = 2$, $Var(Z) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 5$, pertanto: $\sigma_Z = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Inoltre, sfruttando l'indipendenza stocastica di $X, Y$, si ha

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(X-Y)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{-itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = e^{4it - \frac{t^2}{2}} e^{-2it - \frac{t^2}{8}} = e^{2it - \frac{5t^2}{8}} ;$$

pertanto: $Z \sim N_{2, \frac{\sqrt{5}}{2}}$. Allora

$$p = P\left(Z > 2 + \sqrt{5} \,|\, Z > 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{P(Z > 2 + \sqrt{5}, Z > 2 + \frac{\sqrt{5}}{2})}{P(Z > 2 + \frac{\sqrt{5}}{2})} = \frac{P(Z > 2 + \sqrt{5})}{P(Z > 2 + \frac{\sqrt{5}}{2})} =$$

$$= \frac{1 - \Phi_{2, \frac{\sqrt{5}}{2}}(2 + \sqrt{5})}{1 - \Phi_{2, \frac{\sqrt{5}}{2}}(2 + \frac{\sqrt{5}}{2})} = \frac{1 - \Phi(2)}{1 - \Phi(1)} \simeq \frac{1 - 0.9772}{1 - 0.8413} \simeq 0.1437 .$$

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_{24}, \sigma_{24}}$, con $\overline{x} = \frac{1}{2}$, $m_{24} = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2} \cdot \overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = \frac{25}{49}$; $\frac{1}{\sigma_{24}^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = 49$, $\sigma_{24} = \frac{1}{7}$; ovvero $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{\frac{25}{49}, \frac{1}{7}}$. Pertanto

$$P\left(\frac{25}{49} - c \leq \Theta \leq \frac{25}{49} + c \mid \mathbf{x}\right) = \Phi_{\frac{25}{49}, \frac{1}{7}}\left(\frac{25}{49} + c\right) - \Phi_{\frac{25}{49}, \frac{1}{7}}\left(\frac{25}{49} - c\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\frac{25}{49} + c - \frac{25}{49}}{\frac{1}{7}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{25}{49} - c - \frac{25}{49}}{\frac{1}{7}}\right) = \Phi(7c) - \Phi(-7c) = 2\Phi(7c) - 1 .$$

Allora, (ricordando che $\Phi$ è una funzione crescente) si ha

$$2\Phi(7c) - 1 = 2\Phi(2) - 1 \iff \Phi(7c) = \Phi(2) \iff 7c = 2 \iff c = 2\sigma_{24} = \frac{2}{7} .$$