Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina* - 16/9/2016)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. I pezzi prodotti da una macchina possono avere 3 tipi di difetti. Scelto a caso un pezzo, siano definiti gli eventi $E_i =$ *"nel pezzo è assente l'i-mo difetto"*, $i = 1, 2, 3$, con E_1, E_2, E_3 supposti indipendenti e con $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$. Calcolare: (i) la varianza del numero aleatorio X di difetti assenti nel pezzo; (ii) la probabilità α che nel pezzo siano assenti al massimo 2 difetti; (iii) la probabilità β che nel pezzo sia assente almeno un difetto, supposto che sia assente al massimo un difetto.

   $Var(X) =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo X è $f(x) = c(1-x)$, per $x \in [0, 1]$, $f(x) = c(x-1)^2$, per $x \in (1, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante c; inoltre, determinare il valore x_0 tale che $P(X > x_0) = 4\,P(X \leq x_0)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $x_0 =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = c$, per (x, y) appartenente al triangolo T di vertici i punti $(1, 1), (3, 1), (1, 3)$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante c e il valore a tale che $P(X + Y \leq a) = P(X + Y > a)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $a =$

4. Tre dispositivi d_1, d_2, d_3 sono stati prodotti dalla stessa macchina: M_1 (ipotesi H), oppure M_2 (ipotesi H^c), con $P(H) = 2P(H^c)$. Con M_1 ogni dispositivo ha una probabilità $\frac{1}{2}$ di essere difettoso, mentre con M_2 la probabilità è $\frac{1}{4}$. Gli eventi $E_i =$ *"il dispositivo d_i è difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, sono giudicati indipendenti sia condizionatamente ad H che ad H^c. Sia X il numero aleatorio di dispositivi difettosi; calcolare la probabilità condizionata $p = P(X = 0 \,|\, X \leq 1)$ e stabilire se la disuguaglianza $P(H \,|\, X = 0) > P(H^c \,|\, X = 0)$ è valida, oppure no.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $P(H \,|\, X = 0) > P(H^c \,|\, X = 0)$?

5. Siano dati due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_X = 3, \lambda_Y = 2$. Posto $Z = \max\{X, Y\}$, calcolare la funzione di rischio e la previsione di Z.

   $h_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(Z) =$

6. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con distribuzione normale $N_{0,2}$, posto $V = X - 1$, $W = Y + 1$, calcolare la funzione caratteristica di $Z = V + W$ e la covarianza della coppia $(X + V, Y + W)$. (*ricordiamo che per una distribuzione* $N_{m,\sigma}$ la funzione caratteristica è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$)

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(X{+}V, Y{+}W) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è $\beta(\theta) = \frac{1}{24}\theta^4 e^{-\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_5)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione esponenziale di parametro θ. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_5)$, con $x_1 + \cdots + x_5 = 4$, calcolare la previsione m_5 e lo scarto quadratico medio σ_5 di $\Theta|\mathbf{x}$.

   $m_5 =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_5 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 16/9/2016.

1. Si ha $X \sim B(3, \frac{1}{3})$, da cui segue: $Var(X) = npq = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Inoltre $\alpha = P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - P(E_1E_2E_3) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{26}{27}$. Infine $\beta = P(X \geq 1 \,|\, X \leq 1) = \frac{P(X=1)}{P(X\leq 1)} = \frac{P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)} = \frac{\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{27}+\frac{4}{9}} = \frac{3}{5}$.

2. Si ha: $c\int_0^1(1-x)dx + c\int_1^2(x-1)^2dx = \cdots = \frac{c}{2} + \frac{c}{3} = 1$, da cui segue: $c = \frac{6}{5}$. Inoltre, $P(X \leq x_0) + P(X > x_0) = 5\,P(X \leq x_0) = 1$; pertanto: $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \frac{1}{5}$. Allora, tenendo conto che per $x \in [0,1]$ si ha $F(x) = \frac{6}{5}\int_0^x(1-t)dt = \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}x^2$, con $F(1) = \frac{3}{5} > \frac{1}{5} = F(x_0)$, segue $x_0 \in [0,1]$; pertanto: $F(x_0) = \frac{6}{5}x_0 - \frac{3}{5}x_0^2 = \frac{1}{5}$, da cui segue $x_0 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.1835$.

3. L'area di T è $\mu(T) = 2$; pertanto: $\int\int_T f(x,y)dxdy = \int\int_T cdxdy = c\mu(T) = 2c = 1$, da cui segue: $c = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{2}$. Inoltre, per $a \in [2,4]$, la retta di equazione $x + y = a$ interseca il triangolo T nei punti $(a-1,1),(1,a-1)$. Allora, osservando che le condizioni $P(X+Y \leq a) + P(X+Y > a) = 1$, $P(X+Y \leq a) = P(X+Y > a)$ equivalgono a $P(X+Y \leq a) = P(X+Y > a) = \frac{1}{2}$, si ha
$$P(X+Y \leq a) = \int_1^{a-1} dx \int_1^{a-x} \frac{1}{2}dy = \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-2)^2}{2} = \frac{1}{2} \iff a = 2 + \sqrt{2}\,.$$
Nota: poichè $(X,Y) \sim U(T)$, la retta di equazione $x + y = 2 + \sqrt{2}$ divide T in due parti aventi la stessa area: $\frac{1}{2}\,\mu(T) = 1$.

4. Si ha $P(H) + P(H^c) = 3P(H^c) = 1$; pertanto $P(H^c) = \frac{1}{3}$, $P(H) = \frac{2}{3}$. Inoltre
$$(X=0) = E_1^cE_2^cE_3^c\,, \quad (X \leq 1) = E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^cE_3^c\,, \quad (X=0) \wedge (X \leq 1) = (X=0)\,.$$
Pertanto: $p = P(X = 0 \,|\, X \leq 1) = \frac{P(E_1^cE_2^cE_3^c)}{P(E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^cE_3^c)}$, con
$$P(E_1^cE_2^c) = P(E_1^cE_2^c|H)P(H) + P(E_1^cE_2^c|H^c)P(H^c) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{3} = \frac{17}{48} = P(E_i^cE_j^c)\,,\ i \neq j\,;$$
$$P(E_1^cE_2^cE_3^c) = P(E_1^cE_2^cE_3^c|H)P(H) + P(E_1^cE_2^cE_3^c|H^c)P(H^c) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{3} = \frac{43}{192}\,.$$
$$P(E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^cE_3^c) = \cdots = 3P(E_1^cE_2^c) - 2P(E_1^cE_2^cE_3^c) = 3 \cdot \frac{17}{48} - 2 \cdot \frac{43}{192} = \frac{59}{96}\,.$$
Allora
$$p = P(X = 0 \,|\, X \leq 1) = \frac{P(E_1^cE_2^cE_3^c)}{P(E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^cE_3^c)} = \frac{\frac{43}{192}}{\frac{59}{96}} = \frac{43}{118}\,.$$
Infine, osservando che $P(H^c \,|\, X = 0) = 1 - P(H \,|\, X = 0)$, si ha
$$P(H \,|\, X = 0) = \frac{P(E_1^cE_2^cE_3^c|H)P(H)}{P(E_1^cE_2^cE_3^c)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{2}{3}}{\frac{43}{192}} = \frac{16}{43} < \frac{27}{43} = P(H^c \,|\, X = 0)\,.$$

5. Si ha $Z \geq 0$; inoltre per ogni fissato $z > 0$, osservando che $P(X \leq z) = F_X(z) = 1 - e^{-3z}$, $P(Y \leq z) = F_Y(z) = 1 - e^{-2z}$, risulta

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z) = 1 - e^{-2z} - e^{-3z} + e^{-5z}\,;$$

allora: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{F'_Z(z)}{1-F_Z(z)} = \frac{2e^{-2z}+3e^{-3z}-5e^{-5z}}{e^{-2z}+e^{-3z}-e^{-5z}}$. Inoltre, ricordando che per una distribuzione esponenziale di parametro λ la previsione è $\int_0^{+\infty} \lambda z e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{\lambda}$, si ha

$$\mathbb{P}(Z) = \int_0^{+\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} 2ze^{-2z}dz + \int_0^{+\infty} 3ze^{-3z}dz - \int_0^{+\infty} 5ze^{-5z}dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{19}{30}\,.$$

6. Si ha: $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = e^{-2t^2}$; inoltre X e Y sono stocasticamente indipendenti; allora

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(V+W)}) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y)}) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{-4t^2}\,;$$

ovvero: $Z \sim N_{0,2\sqrt{2}}$. Infine, osservando che nel nostro caso $Cov(X,Y) = 0$ e ricordando che $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X,Y)$, si ha

$$Cov(X + V, Y + W) = Cov(2X - 1, 2Y + 1) = 4Cov(X,Y) = 0\,.$$

7. Si ha $f_{X_i}(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$; allora, per la funzione di verosimiglianza, si ottiene $\alpha(\theta|\mathbf{x}) = \theta e^{-\theta x_1} \cdots \theta e^{-\theta x_5} = \theta^5 e^{-4\theta}$. Pertanto

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\frac{1}{24}\theta^4 e^{-\theta}\theta^5 e^{-4\theta} = k_1(\mathbf{x})\theta^9 e^{-5\theta}\,,\ \theta \geq 0\,;$$

ovvero: $\Theta|\mathbf{x} \sim G_{10,5}(\theta)$, con $k_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} = \frac{5^{10}}{9!}$. Allora

$$m_5 = \mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{10}{5} = 2\,, \quad \sigma_5 = \sqrt{\frac{c}{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\,.$$