Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina* - 31/3/2016)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da due urne U e V, contenenti 8 palline bianche e 4 nere, si tolgono a caso 6 palline; successivamente, le palline estratte da ciascuna urna vengono inserite nell'altra. Siano X ed Y i numeri aleatori di palline bianche in U e V, al termine dell'esperimento. Calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione di X, Y. (*indicare con Z e W i numeri aleatori di palline bianche estratte da U e V, inserite poi in V e U*).

   $Cov(X, Y) =$ $\qquad\qquad$ $\rho_{XY} =$

2. Il tempo aleatorio X impiegato da una persona per completare un lavoro ha una densità $f(x) = x^2 + cx$, per $x \in [0, 1]$ e zero altrove. Calcolare il valore della costante c, la funzione di ripartizione $F(x)$ e la varianza σ^2.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $F(x) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\sigma^2 =$

3. Una macchina produce pezzi in serie, ognuno dei quali è difettoso con probabilità $\frac{1}{4}$. Considerati gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo è difettoso"*, $i = 1, 2, \ldots$, (giudicati stocasticamente indipendenti), e posto $A = E_1E_2 \vee E_2E_3$ e $B = E_1 \vee E_2 \vee E_3$, calcolare la probabilità $\alpha = P(A|B)$. Sia inoltre X il numero aleatorio di pezzi difettosi tra i primi 3 prodotti dalla macchina. Calcolare la probabilità condizionata $\beta = P(X < 3 \,|\, X > 0)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

4. Dati 2 numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti, con $X \sim N_{3,1}$, $Y \sim N_{-3,1}$, sia $Z = X + Y$. Calcolare $Cov(Z - X, Z - Y)$ e $p = P(Z \leq -\sqrt{2} \,|\, Z \leq 2\sqrt{2})$.

   $Cov(Z-X, Z-Y) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y), con $X \geq 0,\ Y \geq 3X$, è $f(x, y) = aye^{-x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 3x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e le densità marginali $f_1(x)$, per $x > 0$, ed $f_2(y)$, per $y > 0$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $f_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $f_2(y) =$

6. La funzione di rischio di un numero aleatorio non negativo X è $h(x) = 2x$, per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ e la previsione di X.

   $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$

7. Da un'urna contenente quattro palline, due delle quali numerate con il numero 1 e due con il numero -1, si effettuano due estrazioni senza restituzione ottenendo dei risultati aleatori X e Y. Calcolare la funzione caratteristica e la funzione di ripartizione del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $F_Z(z) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 31/3/2016.

1. Si ha $X = 8-Z+W$, $Y = 8+Z-W$, con Z, W stocasticamente indipendenti e ugualmente distribuiti, con $Z \sim H(12, 6, \frac{2}{3})$, $W \sim H(12, 6, \frac{2}{3})$, $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(W) = np = 4$, $Var(Z) = Var(W) = npq(1 - \frac{n-1}{N-1}) = \frac{8}{11}$, $Cov(Z, W) = 0$; allora

$$Cov(X, Y) = Cov(4-Z+W, 4+Z-W) = Cov(-Z+W, Z-W) = -Cov(Z-W, Z-W) =$$

$$= -Var(Z - W) = -Var(Z) - Var(W) + 2Cov(Z, W) = -2Var(Z) = -\frac{16}{11}\,.$$

Infine, osservando che $X + Y = 8 - Z + W + 8 + Z - W = 16$, ovvero $Y = -X + 16$ (*relazione lineare del tipo* $Y = aX + b$, *con* $a < 0$), segue: $\rho_{XY} = -1$.

2. Si ha: $\int_0^1 (x^2 + cx)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{c}{2} = 1$; pertanto: $c = \frac{4}{3}$. Allora, per ogni $x \in (0, 1)$, si ha: $F(x) = \int_0^x (t^2 + \frac{4}{3}t)dt = \frac{x^3+2x^2}{3}$; inoltre: $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = 1$, per $x \geq 1$. Infine

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (x^3 + \frac{4}{3}x^2)dx = \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{9}\right) = \frac{25}{36}\,;$$

$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 (x^4 + \frac{4}{3}x^3)dx = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}\,;$$

allora: $\sigma^2 = \frac{8}{15} - \frac{625}{1296} = \cdots = \frac{331}{6480}$.

3. Si ha: $(E_1E_2 \vee E_2E_3) \wedge (E_1 \vee E_2 \vee E_3) = E_1E_2 \vee E_2E_3$, $(E_1 \vee E_2 \vee E_3)^c = E_1^cE_2^cE_3^c$; allora

$$\alpha = P(A|B) = P(E_1E_2 \vee E_2E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1E_2 \vee E_2E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} =$$

$$= \frac{P(E_1E_2) + P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3)}{1 - P(E_1^cE_2^cE_3^c)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{7}{37}\,.$$

Inoltre, $X \sim B(3, \frac{1}{4})$, con $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ e con $P(X = h) = \binom{3}{h}\left(\frac{1}{4}\right)^h\left(\frac{3}{4}\right)^{3-h}$, $h = 0, 1, 2, 3$. Allora

$$\beta = P(X < 3 \,|\, X > 0) = \frac{P(0 < X < 3)}{P(X > 0)} = \frac{P(X = 1) + P(X = 2)}{1 - P(X = 0)} = \frac{\frac{27}{64} + \frac{9}{64}}{1 - \frac{27}{64}} = \frac{36}{37}\,.$$

4. Si ha $Z-X=Y$, $Z-Y=X$, $Cov(Z-X,Z-Y)=Cov(Y,X)=Cov(X,Y)=0$. Inoltre, ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione $N_{m,\sigma}$ è $\varphi(t)=e^{imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$, si ha: $\varphi_X(t)=e^{3it-\frac{t^2}{2}}$, $\varphi_Y(t)=e^{-3it-\frac{t^2}{2}}$, $\varphi_Z(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=e^{3it-\frac{t^2}{2}}e^{-3it-\frac{t^2}{2}}=e^{-t^2}$; pertanto: $Z\sim N_{0,\sqrt{2}}$. Allora, osservando che $\frac{Z}{\sqrt{2}}\sim N_{0,1}$, segue

$$p=P(Z\le-\sqrt{2}\,|\,Z\le 2\sqrt{2})=\frac{P(Z\le-\sqrt{2})}{P(Z\le 2\sqrt{2})}=\frac{P(Z\le-\sqrt{2})}{P(Z\le 2\sqrt{2})}=\frac{P(\frac{Z}{\sqrt{2}}\le-1)}{P(\frac{Z}{\sqrt{2}}\le 2)}$$

$$=\frac{\Phi(-1)}{\Phi(2)}=\frac{1-\Phi(1)}{\Phi(2)}\simeq\frac{1-0.8413}{0.9772}\simeq 0.1624\,.$$

5. Fissato $x>0$, tenendo conto che $\int_{3x}^{+\infty}ye^{-y}dy=[-ye^{-y}]_{3x}^{+\infty}+\int_{3x}^{+\infty}e^{-y}dy=3xe^{-3x}+e^{-3x}$, si ha:

$$f_1(x)=\int_{3x}^{+\infty}aye^{-x-y}dy=ae^{-x}\int_{3x}^{+\infty}ye^{-y}dy=ae^{-x}(3xe^{-3x}+e^{-3x})=3axe^{-4x}+ae^{-4x}\,,$$

con $\int_0^{+\infty}f_1(x)dx=3a\int_0^{+\infty}xe^{-4x}dx+a\int_0^{+\infty}e^{-4x}dx=\cdots=\frac{3a}{16}+\frac{a}{4}=\frac{7}{16}a=1$; pertanto $a=\frac{16}{7}$, da cui segue: $f_1(x)=\frac{48}{7}xe^{-4x}+\frac{16}{7}e^{-4x}$. Inoltre, fissato $y>0$, si ha

$$f_2(y)=\int_0^{\frac{y}{3}}\frac{16}{7}ye^{-x-y}dx=\frac{16}{7}ye^{-y}\int_0^{\frac{y}{3}}e^{-x}dx=\frac{16}{7}ye^{-y}(1-e^{-\frac{y}{3}})=\frac{16}{7}ye^{-y}-\frac{16}{7}ye^{-\frac{4}{3}y}\,.$$

6. Per ogni fissato $x>0$, si ha: $S(x)=P(X>x)=e^{-\int_0^x h(t)dt}=e^{-\int_0^x 2tdt}=e^{-x^2}$, con $S(x)=1$, per $x\le 0$. Allora: $F(x)=0$, per $x\le 0$; inoltre $F(x)=1-S(x)=1-e^{-x^2}$, per $x>0$; pertanto $f(x)=2xe^{-x^2}$, per $x>0$, con $f(x)=0$ altrove. Infine, tenendo conto che per un numero aleatorio Z con distribuzione $N_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}z^2e^{-z^2}dz=\mathbb{P}(Z^2)=Var(Z)=\frac{1}{2}\,,$$

e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-z^2}dz=\int_0^{+\infty}2z^2e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, si ottiene

$$\mathbb{P}(X)=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}2x^2e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

7. Si ha $(X,Y)\in\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$, $Z\in\{-2,0,2\}$, con

$$(Z=-2)=(X=-1,Y=-1)\,,\quad (Z=2)=(X=1,Y=1)\,,\quad (Z=0)=(X\ne Y)\,,$$

$$P(Z=-2)=P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P(X=1,Y=1)=P(Z=2)\,,$$

$$P(Z=0)=P(X=-1,Y=1)+P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_Z(t)=\sum_h p_he^{ith}=\frac{1}{6}\,e^{-2it}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\,e^{2it}=\frac{2+\cos 2t}{3}\,.$$

Inoltre: $F_Z(z)=0$, per $z<-2$; $F_Z(z)=\frac{1}{6}$, per $-2\le z<0$; $F_Z(z)=\frac{5}{6}$, per $0\le z<2$; $F_Z(z)=1$, per $z\ge 2$.