Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina* - 8/6/2016)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Dati 3 numeri aleatori X, Y, Z, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale di parametri $m = 0, \sigma = 2$, sia $V = X - Y + Z$ e $W = aV$, con $a > 0$. Calcolare la funzione caratteristica di V e il valore della costante a tale che W abbia una distribuzione normale standard. Inoltre, posto $U = X - Y, T = Y - Z$, calcolare $Cov(U, T)$. (*ricordiamo che per una distribuzione normale di parametri* m, σ *si ha* $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$)

   $\varphi_V(t) =$ $\qquad$ $a =$ $\qquad$ $Cov(U, T) =$

2. Una macchina produce pezzi in serie, ognuno dei quali è difettoso con probabilità $\frac{1}{4}$. Considerati gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo è difettoso"*, $i = 1, 2, \ldots$, (giudicati stocasticamente indipendenti), e posto $A = E_1E_2E_3 \vee E_2E_3E_4$ e $B = E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_3E_4$, calcolare la probabilità $\alpha = P(A|B)$. Sia inoltre X il numero aleatorio di pezzi difettosi tra i primi 4 prodotti dalla macchina. Calcolare la probabilità condizionata $\beta = P(X < 4 \,|\, X > 0)$.

   $\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$

3. Dato un numero aleatorio X con distribuzione $N_{\sqrt{2},\sqrt{2}}$, calcolare la probabilità condizionata $p = P(0 \leq X \leq 2\sqrt{2} \,|\, -\sqrt{2} \leq X \leq 3\sqrt{2})$. Inoltre, assumendo che $X \sim N_{m,\sigma}$, verificare se $a = b$, dove $a = P(X \geq m - k\sigma \,|\, X \leq m + \sigma)$, $b = P(X \leq m + k\sigma \,|\, X \geq m - \sigma)$, con $k > 0$.

   $p =$ $\qquad$ $a = b$?

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = a(y - x)$, per (x, y) appartenente al triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la probabilità condizionata $p = P(Y \geq \frac{1}{2} \,|\, X \leq \frac{1}{2})$.

   $a =$ $\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $Z = Y - X$, calcolare la densità di probabilità e la previsione di Z.

   $f(z) =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(Z) =$

6. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = 25xe^{-5x}$, $x \geq 0$ e con $f(x) = 0$ altrove, Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di sopravvivenza $S(x)$ e la funzione di rischio $h(x)$. Fissati inoltre $x > 0, y > 0$, stabilire se $P(X > x+y \,|\, X > y) = P(X > x)$.

   $S(x) =$ $\qquad$ $h(x) =$ $\qquad$ $P(X > x+y \,|\, X > y) = P(X > x)$?

7. Da un'urna U, contenente 3 palline bianche e 4 nere, vengono estratte senza restituzione tutte le palline. Tizio estrae le prime 3 palline; Caio estrae le ultime 3. Ciascuno dei due vince un premio se estrae tutte palline bianche. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", calcolare: (i) la probabilità p che almeno uno tra Tizio e Caio vinca il premio; (ii) la probabilità α che almeno uno dei due vinca il premio, supposto che E_4 sia falso.

   $p =$ $\qquad$ $\alpha =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta dell'8/6/2016.

1. Si ha: $\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = e^{-2t^2} = \varphi_Y(t) = \varphi_Z(t)$; inoltre $\varphi_{-Y}(t) = \varphi_Y(-t) = e^{-2t^2}$; pertanto: $\varphi_V(t) = \mathbb{P}(e^{itV}) = \mathbb{P}(e^{it(X-Y+Z)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{i(-t)Y})\mathbb{P}(e^{itZ}) = e^{-6t^2}$; ovvero $V \sim N_{0,2\sqrt{3}}$. Inoltre
$$\varphi_W(t) = \mathbb{P}(e^{itW}) = \mathbb{P}(e^{iatV}) = \varphi_V(at) = e^{-6a^2t^2} = e^{-\frac{t^2}{2}} \iff 6a^2 = \frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,.$$
Infine: $Cov(X,Y) = Cov(X,Z) = Cov(Y,Z) = 0,\ Cov(Y,Y) = Var(Y) = 4$; allora
$$Cov(U,T) = Cov(X-Y, Y-Z) = Cov(X,Y) - Cov(X,Z) - Cov(Y,Y) + Cov(Y,Z) = -4\,.$$

2. Si ha: $A \subseteq B$ e quindi
$$AB = (E_1E_2E_3 \vee E_2E_3E_4) \wedge (E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_3E_4) = E_1E_2E_3 \vee E_2E_3E_4 = A\,.$$
Allora, ricordando che gli eventi sono equiprobabili e indipendenti, segue
$$\alpha = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(E_1E_2E_3 \vee E_2E_3E_4)}{P(E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_3E_4)} =$$
$$= \frac{P(E_1E_2E_3) + P(E_2E_3E_4) - P(E_1E_2E_3E_4)}{P(E_1E_2) + P(E_2E_3) + P(E_3E_4) - P(E_1E_2E_3) - P(E_1E_2E_3E_4) - P(E_2E_3E_4) + P(E_1E_2E_3E_4)} =$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4} = \frac{7}{40}\,.$$
Inoltre, $X \sim B(4, \frac{1}{4})$, con $X \in \{0,1,2,3,4\}$ e con $P(X=h) = \binom{4}{h}\left(\frac{1}{4}\right)^h\left(\frac{3}{4}\right)^{4-h}$, $h = 0,1,2,3,4$. Allora, osservando che $P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$, $P(X=4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$, segue
$$\beta = \frac{P(0 < X < 4)}{P(X > 0)} = \frac{1 - P(X=0) - P(X=4)}{1 - P(X=0)} = \frac{1 - \frac{81}{256} - \frac{1}{256}}{1 - \frac{81}{256}} = \frac{174}{175} \simeq 0.9943\,.$$

3. Ricordando che $\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, con $\Phi(1) \simeq 0.8413$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, si ha
$$p = P(0 \le X \le 2\sqrt{2} \mid -\sqrt{2} \le X \le 3\sqrt{2}) = \frac{P(0 \le X \le 2\sqrt{2}\,, -\sqrt{2} \le X \le 3\sqrt{2})}{P(-\sqrt{2} \le X \le 3\sqrt{2})} =$$
$$= \frac{P(0 \le X \le 2\sqrt{2})}{P(-\sqrt{2} \le X \le 3\sqrt{2})} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{\Phi(2) - \Phi(-2)} = \frac{2\Phi(1) - 1}{2\Phi(2) - 1} \simeq \frac{0.6826}{0.9544} \simeq 0.7152\,.$$
Inoltre
$$a = P(X \ge m - k\sigma \mid X \le m + \sigma) = \frac{P(X \ge m - k\sigma, X \le m + \sigma)}{P(X \le m + \sigma)} = \frac{P(m - k\sigma \le X \le m + \sigma)}{P(X \le m + \sigma)} =$$
$$= \frac{\Phi_{m,\sigma}(m+\sigma) - \Phi_{m,\sigma}(m - k\sigma)}{\Phi_{m,\sigma}(m+\sigma)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-k)}{\Phi(1)} = \frac{\Phi(1) + \Phi(k) - 1}{\Phi(1)}\,.$$
$$b = \frac{P(X \le m + k\sigma, X \ge m - \sigma)}{P(X \ge m - \sigma)} = \frac{P(m - \sigma \le X \le m + k\sigma)}{1 - P(X \le m - \sigma)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-k)}{1 - \Phi(-1)} = \frac{\Phi(1) + \Phi(k) - 1}{\Phi(1)}\,.$$
Pertanto: $a = b$.

4. Si ha: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int\int_T f(x,y)dxdy = a\int_0^1 dx\int_x^1 (y-x)dy = \cdots =$
$= a\int_0^1(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2})dx = \frac{a}{6} = 1$; pertanto: $a = 6$. Inoltre

$$p = \frac{P(X \leq \frac{1}{2}, Y \geq \frac{1}{2})}{P(X \leq \frac{1}{2})} = \frac{6\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}}^1 (y-x)dy}{6\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_x^1 (y-x)dy} = \cdots = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{8} - \frac{x}{2})dx}{\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2})dx} = \cdots = \frac{6}{7}.$$

5. Al variare di (X,Y) in T, si ha $Z \in [0,1]$; in particolare $Z = 0$ quando (X,Y) appartiene al segmento di vertici i punti $(0,0),(1,1)$; $Z = 1$ quando $(X,Y) = (0,1)$. Allora $F(z) = P(Z \leq z) = P(Y \leq X + z) = 0$ per $z \leq 0$, $F(z) = 1$ per $z \geq 1$. Inoltre, fissato $z \in (0,1)$, si ha $(Z > z)$ se e solo se $(X,Y) \in T_z$, dove T_z è il triangolo di vertici i punti $(0,z),(0,1),(1-z,1)$; pertanto: $P(Z > z) = P(Y > X + z) =$

$$= \int_0^{1-z} dx \int_{x+z}^1 6(y-x)dy = \cdots = 6\int_0^{1-z}(\frac{x^2}{2} - x - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2})dx = \cdots = 2z^3 - 3z^2 + 1\,,$$

da cui segue: $F(z) = 1 - (2z^3 - 3z^2 + 1) = 3z^2 - 2z^3$; pertanto: $f(z) = F'(z) = 6z - 6z^2$, per $z \in [0,1]$, con $f(z) = 0$ altrove. Infine: $\mathbb{P}(Z) = \int_0^1 zf(z)dz = \int_0^1(6z^2 - 6z^3) = \cdots = \frac{1}{2}$.
(tale risultato segue in termini geometrici osservando che il grafico della densità $f(z)$ nell'intervallo $[0,1]$ è un arco di parabola simmetrico rispetto alla retta di equazione $z = \frac{1}{2}$)

6. Per ogni $x > 0$, si ha

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} 25te^{-5t}dt = [5t(-e^{-5t})]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} 5e^{-5t}dt = 5xe^{-5x} + e^{-5x} = (5x+1)e^{-5x}\,,$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{25xe^{-5x}}{(5x+1)e^{-5x}} = \frac{25x}{5x+1}\,.$$

Inoltre, $P(X > x + y \,|\, X > y) \neq P(X > x)$ in quanto la distribuzione non è esponenziale; infatti

$$P(X > x+y \,|\, X > y) = \frac{P(X > x+y)}{P(X > y)} = \frac{S(x+y)}{S(y)} = \frac{(5x+5y+1)e^{-5x-5y}}{(5y+1)e^{-5y}} =$$

$$= \frac{(5x+5y+1)e^{-5x}}{5y+1} = \left(\frac{5x}{5y+1} + 1\right)e^{-5x} \neq (5x+1)e^{-5x} = P(X > x)\,.$$

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_7$ sono scambiabili, con

$$P(E_i) = \frac{3}{7}\,,\; P(E_i^c) = \frac{4}{7}\,,\; P(E_iE_jE_k) = P(E_1E_2E_3) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{35}\,,\; i \neq j \neq k\,.$$

Inoltre, si ha $A = E_1E_2E_3$, $B = E_5E_6E_7$, con A e B incompatibili. Allora

$$p = P(A \vee B) = P(A) + P(B) = P(E_1E_2E_3) + P(E_5E_6E_7) = 2P(E_1E_2E_3) = \frac{2}{35}\,.$$

Infine, osservando che $A \vee B$ implica E_4^c, ovvero $(A \vee B) \wedge E_4^c = A \vee B$, si ha

$$\alpha = P(A \vee B \,|\, E_4^c) = \frac{P[(A \vee B) \wedge E_4^c]}{P(E_4^c)} = \frac{P(A \vee B)}{P(E_4^c)} = \frac{\frac{2}{35}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{10}\,.$$