Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina* - 8/7/2016)
(risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. I pezzi prodotti da una macchina possono avere 3 tipi di difetti e sono accettati se sono assenti almeno 2 difetti. Scelto a caso un pezzo, siano definiti gli eventi $E_i =$ *"il pezzo non presenta l'i-mo difetto"*, $i = 1, 2, 3$, con E_1, E_2, E_3 supposti indipendenti e con $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = p \in (0, 1)$. Sia α la probabilità che il pezzo presenti almeno un difetto; calcolare i valori di p tali che $\alpha < \frac{61}{125}$; inoltre, posto $p = \frac{4}{5}$, calcolare: (i) la probabilità β che il pezzo sia accettato; (ii) la probabilità γ che il pezzo non presenti il primo tipo di difetto, supposto che sia scartato.

   $p \in$ $\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo X è $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in [0, 1]$, $f(x) = \frac{3-x}{4}$, per $x \in (1, 3]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$; inoltre, determinare il valore x_0 tale che $P(X \leq x_0) = \frac{7}{8}$.

   $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $x_0 =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = cxy$, per (x, y) appartenente al quadrato $Q = [0, 2] \times [2, 4]$, con $c > 0$ e con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante c e il valore a tale che $P(Y \leq aX) = P(Y > aX)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $a =$

4. Tre dispositivi d_1, d_2, d_3 sono stati prodotti dalla stessa macchina: M_1 (ipotesi H), oppure M_2 (ipotesi H^c), con $P(H^c) = P(H)$. Con M_1 ogni dispositivo ha una probabilità p di essere non difettoso, mentre con M_2 la probabilità è $2p$, con $0 < p < \frac{1}{2}$. Definiti gli eventi $E_i =$ *"il dispositivo d_i è non difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, si supponga che E_1, E_2, E_3 siano indipendenti sia condizionatamente ad H che ad H^c. Inoltre, sia X il numero aleatorio di dispositivi difettosi; calcolare i valori di p tali che $P(X \leq 1 \,|\, X \leq 2) > \frac{1}{2}$ e $P(H \,|\, X = 0)$.

   $p \in$ $\qquad\qquad$ $P(H \,|\, X = 0) =$

5. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con distribuzione binomiale di parametri $n = 3, p = \frac{1}{3}$, posto $V = X+1$, $W = Y-1$, calcolare la funzione caratteristica di $Z = V+W$ e la covarianza della coppia $(X+W, Y+V)$. (*ricordiamo che per una distribuzione $B(n, p)$ la funzione caratteristica è $\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n$*)

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(X+W, Y+V) =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 2e^{-2x-y}$,per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $z > 0$, la funzione di sopravvivenza $S(z)$ e la funzione di rischio $h(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $S(z) =$ $\qquad\qquad$ $h(z) =$

7. Da un'urna U, contenente 5 palline bianche e 5 nere, vengono estratte tutte le palline. Tizio estrae le prime 4 palline; Caio estrae le ultime 4. Ciascuno dei due vince un premio se estrae tutte palline bianche. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", calcolare: (i) la probabilità p che almeno uno tra Tizio e Caio vinca il premio; (ii) la probabilità α che almeno uno dei due vinca il premio, supposto E_5 falso ed E_6 vero.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Ing. Mecc. - Latina)

Soluzioni della prova scritta dell'8/7/2016.

1. Si ha $\alpha = P(E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c) = 1 - P(E_1E_2E_3) = 1 - p^3 < \frac{61}{125} \iff p > \frac{4}{5}$. Inoltre, osservando che $\beta = P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)$, con $P(E_iE_j) = p^2 = \frac{16}{25}$, $i \neq j$, $P(E_1E_2E_3) = p^3 = \frac{64}{125}$, si ha
$$\beta = \cdots = 3P(E_1E_2) - 2P(E_1E_2E_3) = 3 \cdot \frac{16}{25} - 2 \cdot \frac{64}{125} = \frac{112}{125} = 0.896\,.$$
Infine, poichè il pezzo è scartato se e solo se si verifica l'evento $E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^cE_3^c$, con $P(E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^cE_3^c) = 3P(E_1^cE_2^c) - 2P(E_1^cE_2^cE_3^c) = 3 \cdot \frac{1}{25} - 2 \cdot \frac{1}{125} = \frac{13}{125}$, si ha
$$\gamma = P(E_1 \,|\, E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^cE_3^c) = \frac{P(E_1E_2^cE_3^c)}{P(E_1^cE_2^c \vee E_1^cE_3^c \vee E_2^cE_3^c)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{25}}{\frac{13}{125}} = \frac{4}{13} \simeq 0.3077\,.$$

2. Si ha $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = 1$, per $x \geq 3$; inoltre, per $x \in (0,1]$, si ha $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}dt = \frac{x}{2}$; per $x \in (1,3]$, si ha $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}dt + \int_1^x \frac{3-t}{4}dt = \frac{1}{2} + \frac{-x^2+6x-5}{8} = \frac{-x^2+6x-1}{8}$. Inoltre, osservando che $F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{2} < \frac{7}{8} = P(X \leq x_0)$, segue $x_0 \in (1,3)$; allora $P(X \leq x_0) = F(x_0) = \frac{-x_0^2+6x_0-1}{8} = \frac{7}{8}$, ovvero: $x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0$, pertanto: $x_0 = 2$.

3. Si ha: $\int\int_Q f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_2^4 cxydy = \cdots = 12c = 1$; pertanto: $c = \frac{1}{12}$. Inoltre, essendo $P(Y \leq aX) + P(Y > aX) = 1$, segue $P(Y \leq aX) = P(Y > aX) = \frac{1}{2}$. Osservando che la retta di equazione $y = 2x$ (corrispondente ad $a = 2$) passa per il punto $[2,4]$ e interseca la retta di equazione $y = 2$ nel punto $(1,2)$, con
$$P(Y \leq 2X) = \frac{1}{12}\int_1^2 dx \int_2^{2x} xydx = \cdots = \frac{1}{24}\int_1^2 (4x^3 - 4x)dx = \frac{3}{8} < \frac{1}{2}\,,$$
segue: $a > 2$. Pertanto, considerando l'evento $(Y > aX)$ con $a > 2$, si ha
$$P(Y > aX) = \frac{1}{12}\int_2^4 dy \int_0^{\frac{y}{a}} xydx = \cdots = \frac{1}{24a^2}\int_2^4 y^3dy = \frac{5}{2a^2} = \frac{1}{2}\,;$$
allora: $a = \sqrt{5}$.

4. Si ha $P(H) + P(H^c) = 1$; pertanto $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$. Inoltre
$$(X \leq 2) = E_1 \vee E_2 \vee E_3\,, \quad (X \leq 1) = E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3\,, \quad (X \leq 1) \wedge (X \leq 2) = (X \leq 1)\,.$$
Pertanto: $P(X \leq 1 \,|\, X \leq 2) = \frac{P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)}$, con
$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1E_2) - P(E_1E_3) - P(E_2E_3) + P(E_1E_2E_3)\,,$$
$$P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = \cdots = P(E_1E_2) + P(E_1E_3) + P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) - P(E_1E_2E_3)\,.$$
Allora, osservando che
$$P(E_i) = P(E_i|H)P(H) + P(E_i|H^c)P(H^c) = p \cdot \frac{1}{2} + 2p \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}p\,,\ i = 1,2,3,$$

$$P(E_iE_j) = P(E_iE_j|H)P(H) + P(E_iE_j|H^c)P(H^c) = p^2 \cdot \frac{1}{2} + 4p^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}p^2 \,,\; i \neq j,$$

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c) = p^3 \cdot \frac{1}{2} + 8p^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}p^3 \,,\; i \neq j,$$

ricordando che $0 < p < \frac{1}{2}$, segue

$$P(X \leq 1 \,|\, X \leq 2) = \cdots = \frac{5p - 6p^2}{3 - 5p + 3p^2} > \frac{1}{2} \iff 5p^2 - 5p + 1 < 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} < p < \frac{1}{2}\,.$$

Infine, osservando che $(X = 0) = E_1E_2E_3$, segue

$$P(H \,|\, X = 0) = \frac{P(X = 0 \,|\, H)P(H)}{P(X = 0)} = \frac{P(E_1E_2E_3|H)P(H)}{P(E_1E_2E_3)} = \frac{\frac{1}{2}p^3}{\frac{9}{2}p^3} = \frac{1}{9}\,.$$

5. Si ha: $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = (\frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3})^3$; inoltre X e Y sono stocasticamente indipendenti; allora

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(V+W)}) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y)}) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (\frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3})^6 \;;\; (Z \sim B(6, \frac{1}{3}))\,.$$

Infine: $Cov(X + W, Y + V) = Cov(X + Y + 1, Y + X + 1) = Cov(X + Y, X + Y) = Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) = 2npq = \frac{4}{3}$.

6. Fissato $z > 0$, si ha $S(z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$; inoltre l'evento $(Z \leq z)$ è vero se e solo se $(X, Y) \in T_z$, dove T_z è il triangolo di vertici i punti $(0, 0), (z, 0), (0, z)$; pertanto

$$P(Z \leq z) = \int\int_{T_z} f(x, y)dxdy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 2e^{-2x-y}dy = \int_0^z 2e^{-2x}dx - 2e^{-z}\int_0^z e^{-x}dx =$$

$$= 1 - e^{-2z} - 2e^{-z}(1 - e^{-z}) = 1 - 2e^{-z} + e^{-2z}\,,$$

da cui segue: $S(z) = 2e^{-z} - e^{-2z}$. Inoltre: $f(z) = -S'(z) = 2e^{-z} - 2e^{-2z}$; pertanto $h(z) = \frac{f(z)}{S(z)} = \frac{2e^{-z} - 2e^{-2z}}{2e^{-z} - e^{-2z}} = \frac{2e^z - 2}{2e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2e^z - 1}$.

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_{10}$ sono scambiabili, con

$$P(E_i) = P(E_i^c) = \frac{1}{2}\,,\; P(E_iE_jE_kE_t) = P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{42}\,,\; i \neq j \neq k \neq t\,.$$

Inoltre, si ha $A = E_1E_2E_3E_4$, $B = E_7E_8E_9E_{10}$, con A e B incompatibili. Allora

$$p = P(A \vee B) = P(A) + P(B) = P(E_1E_2E_3E_4) + P(E_7E_8E_9E_{10}) = 2P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{1}{21}\,.$$

Infine, dalla scambiabilità degli eventi $E_1, \ldots, E_{10}$ segue: $P(AE_5^cE_6) = P(E_1E_2E_3E_4E_5^cE_6) = P(E_5^cE_6E_7E_8E_9E_{10}) = P(BE_5^cE_6)$, con $P(E_1E_2E_3E_4E_5^cE_6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{252}$; allora, osservando che $AE_5^cE_6$ e $BE_5^cE_6$ sono incompatibili e che $P(E_5^cE_6) = P(E_1^cE_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$, si ottiene

$$\alpha = P(A \vee B \,|\, E_5^cE_6) = \frac{P[(A \vee B) \wedge E_5^cE_6]}{P(E_5^cE_6)} = \frac{P(AE_5^cE_6 \vee BE_5^cE_6)}{P(E_5^cE_6)} = \frac{\frac{1}{252} + \frac{1}{252}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{35}\,.$$