Nome e Cognome : ______________________ *Num. Matr. :* ______________

Calcolo delle probabilità (17/6/2002)

(Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio - Latina)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Da un lotto contenente 4 pezzi buoni e 2 difettosi si estraggono senza restituzione 3 pezzi. Sia E_i l'evento *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*. Posto $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$, calcolare per ogni possibile valore x di X la probabilità p_x dell'evento $(X = x)$.

$$\begin{cases} x : \qquad , \qquad , \qquad , \\ \\ p_x : \qquad , \qquad , \qquad , \end{cases}$$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è la funzione $f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}$, per $x \geq 0,\ y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se X ed Y sono stocasticamente indipendenti.

   $Stocast.\ Indipendenti$?

3. L'insieme dei valori possibili di un numero aleatorio discreto X è $\mathcal{C} = \{0, 1, \ldots, 8\}$, con

$$P(X = h) \; = \; \binom{8}{h} \left(\tfrac{1}{4}\right)^h \left(\tfrac{3}{4}\right)^{8-h}, \quad h = 0, 1, \ldots, 8.$$

   Calcolare la probabilità dell'evento $(X \leq 6)$.

$$P(X \leq 6) =$$

4. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è data da $f(x) = a(x-1)^2,\ 0 \leq x \leq 2$; con $f(x) = 0$ altrove. Determinare la costante a e, per ogni $x \in [0, 2]$, la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$a = \qquad\qquad , \quad F(x) =$$

5. Un lotto è costituito da 200 componenti, dei quali 120 sono stati costruiti da una macchina M_1 e 80 da una macchina M_2. Il generico componente risulta difettoso con probabilità $\frac{1}{5}$ se prodotto da M_1 e con probabilità $\frac{2}{5}$ se prodotto da M_2. Dal lotto viene estratto a caso un componente e viene esaminato. Definiti gli eventi E = *"Il pezzo esaminato risulta difettoso"* ed H = *"Il pezzo esaminato è stato prodotto dalla macchina M_2"*, calcolare il rapporto r tra le probabilità $P(H|E)$ e $P(H^c|E)$.

$$r =$$

Soluzioni.

1. Il numero aleatorio X ha distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 6$, $n = 3$, $p = \frac{2}{3}$. Allora $X \in \{1, 2, 3\}$, con

$$p_x = \frac{\binom{4}{x}\binom{2}{3-x}}{\binom{6}{3}}, \quad x = 1, 2, 3.$$

Pertanto: $p_1 = \frac{1}{5}$, $\quad p_2 = \frac{3}{5}$, $\quad p_3 = \frac{1}{5}$.

2. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \cdots = e^{-x}, \ \ x \geq 0;$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = 3e^{-3y}, \ \ y \geq 0.$$

Allora: $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall (x,y)$. Pertanto X e Y sono stocasticamente indipendenti.

3. Come si può notare, X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 8, p = \frac{1}{4}$. Allora, segue:

$$P(X \leq 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - P(X = 7) - P(X = 8) =$$
$$= 1 - \binom{8}{7}\left(\tfrac{1}{4}\right)^7\left(\tfrac{3}{4}\right) - \binom{8}{8}\left(\tfrac{1}{4}\right)^8 = \tfrac{4^8-25}{4^8} \simeq 0.9996.$$

4. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è data da $f(x) = a(x-1)^2$, $0 \leq x \leq 2$; con $f(x) = 0$ altrove. Determinare la costante a e, per ogni $x \in [0, 2]$, la funzione di ripartizione $F(x)$.

Dev'essere: $\int_0^2 f(x)dx = 1$, cioè

$$\int_0^2 a(t-1)^2 dt = a\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2}{3}a = 1,$$

da cui si ottiene $a = \frac{3}{2}$. Inoltre, per ogni fissato $x \in [0, 2]$, si ha

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{3}{2}\int_0^x (t-1)^2 dt = \frac{3}{2}\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^x = \cdots = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x}{2}.$$

5. Si ha

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(E)}, \qquad P(H^c|E) = \frac{P(H^c)P(E|H^c)}{P(E)},$$

e quindi

$$r = \frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{\frac{80}{200}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{120}{200}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{4}{3}.$$