Nome e Cognome : _____ *Matr. :* _____

Calcolo delle probabilità (6/4/2004)

(Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio - Latina)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Stabilire per quale valore della costante a la funzione $f(x) = \frac{x}{a} + 1$, per $x \in [-a, 0]$, $f(x) = -\frac{x}{a} + 1$, per $x \in (0, a]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità.

   $a =$

2. Dato un vettore aleatorio discreto (X, Y), con codominio $\{(-1,0),\ (0,-3),\ (0,0),\ (0,3),\ (1,0)\}$, e posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si assuma

   $$p(-1,0) = p(0,-3) = \frac{1}{4} - a\,,\ \ p(1,0) = p(0,3) = \frac{1}{4} - b\,;\quad 0 \le a \le \frac{1}{4}\,,\ 0 \le b \le \frac{1}{4}\,.$$

   Determinare l'insieme I delle coppie (a, b) tali che $Cov(X, Y) = 0$.

   $I = \{(a, b) :$ $\}$

3. Dato l'insieme $\mathcal{C} = \{(x, y) : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, sia $f(x, y) = (x+1)y$, per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove, la densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) che ha come codominio l'insieme $\mathcal{C}$. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   stoc. indip.?

4. Un'azienda costruisce componenti con tre apparecchiature A, B, C nelle seguenti proporzioni: il 30% è prodotto da A, il 25% da B e la parte restante da C. E' noto che risultano difettosi il 5% dei pezzi prodotti da A, il 20% dei pezzi prodotti da B e il 10% dei pezzi prodotti da C. Calcolare la percentuale p di componenti difettosi prodotti dall'azienda. Inoltre, esaminando a caso un componente e supposto che sia difettoso, calcolare la probabilità γ che sia stato prodotto da C.

   $p =$ $\gamma =$

5. Siano dati tre eventi A_1, A_2, A_3, con $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ e con $P(A_1) = \frac{1}{5}, P(A_2) = \frac{3}{5}, P(A_3) = \frac{4}{5}$, calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ del numero aleatorio $X = |A_1| + |A_2| + |A_3|$.

   $$F(x) = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Soluzioni.

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero, in termini geometrici, l'area del triangolo di vertici $(-a,0),(0,1),(a,0)$ dev'essere unitaria. Quindi: $a = 1$.

2. Osserviamo che $p(0,0) = 2(a+b)$. Inoltre: $X \in \{-1,0,1\}$, $Y \in \{-3,0,3\}$, con

$$P(X=-1) = \tfrac{1}{4} - a\,, P(X=1) = \tfrac{1}{4} - b\,, \;\; P(X=0) = \tfrac{1}{2} + a + b\,,$$

$$P(Y=-3) = \tfrac{1}{4} - a\,, P(Y=3) = \tfrac{1}{4} - b\,, \;\; P(Y=0) = \tfrac{1}{2} + a + b\,,$$

   e quindi: $I\!P(X) = \cdots = a - b$, $I\!P(Y) = \cdots = 3(a-b)$.
   Infine, si ha certamente $XY = 0$ e quindi $I\!P(XY) = 0$. Allora

$$Cov(X,Y) = I\!P(XY) - I\!P(X)I\!P(Y) = -3(a-b)^2 = 0 \iff a = b\,.$$

   Pertanto $I = \{(a,b) : a = b\,,\ 0 \le a \le \tfrac{1}{4}\}$.

3. Si ha: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (x+1)ydy = \frac{x+1}{2}\,,\ -1 \le x \le 1$, con $f_1(x) = 0$ altrove. Inoltre

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-1}^{1} (x+1)ydx = 2y\,,\ \ 0 \le y \le 1\,,$$

   con $f_2(y) = 0$ altrove. Allora $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall\,(x,y)$, e quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti.

4. Indicando con A l'evento "il pezzo è stato prodotto da A" (e analogamente per B e C), si ha $P(A) = \frac{3}{10}\,,\ P(B) = \frac{1}{4}\,,\ P(C) = \frac{11}{20}$. Inoltre, definito l'evento E="il pezzo estratto è difettoso", risulta $P(E|A) = \frac{1}{20},\ P(E|B) = \frac{1}{5},\ P(E|C) = \frac{1}{10}$, da cui segue

$$p = P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) = \cdots = \frac{11}{100} = 0.11\,;$$

   quindi la percentuale di pezzi difettosi è l' 11%. Infine (teorema di Bayes):

$$\gamma = P(C|E) = \frac{P(C)P(E|C)}{P(E)} = \frac{\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{11}{100}} = \frac{9}{22}\,.$$

5. I costituenti ed i corrispondenti valori di X sono rispettivamente

$$C_1 = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3\,,\ \ C_2 = A_1^c \wedge A_2 \wedge A_3\,,\ \ C_3 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3\,,\ \ C_4 = A_1^c \wedge A_2^c \wedge A_3^c\,,$$

$$x_1 = 3\,, \qquad x_2 = 2\,, \qquad x_3 = 1\,, \qquad x_4 = 0\,.$$

   Le probabilità dei costituenti (e dei corrispondenti valori di X) sono

$$P(C_1) = P(A_1) = \tfrac{1}{5},\ P(C_2) = P(A_2) - P(A_1) = \tfrac{2}{5},$$

$$P(C_3) = P(A_3) - P(A_2) = \tfrac{1}{5},\ P(C_4) = 1 - P(A_3) = \tfrac{1}{5}.$$

   Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{5}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{5}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{5}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3\,. \end{cases}$$