

1. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo d_1 e d_2 , con d_2 che entra in funzione nell'istante in cui si guasta d_1 . I tempi aleatori di durata dei due dispositivi sono due numeri aleatori X e Y , stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Fissato un valore positivo t , calcolare la probabilità p che il dispositivo d_1 si guasti dopo l'istante t , supposto che S si guasti dopo l'istante t .

$$p =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente calcolare, per ogni $t > 0$ la funzione di rischio $h_T(t)$ del tempo aleatorio T di durata fino al guasto del sistema S .

$$h_T(t) =$$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2 + y^2}{2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(X > 1, Y > 1)$.

$$p =$$

4. Un vettore aleatorio discreto (X, Y) è uniformemente distribuito sull'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(0, 0), (-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)\}$. Considerato il numero aleatorio $Z = 2X^2 - Y$, determinare: (i) il codominio C_Z di Z ; (ii) la previsione m e la varianza σ^2 di Z ; (iii) la probabilità condizionata $p = P(Z > 0 | Y \leq 0)$.

$$C_Z =$$

$$m =$$

$$\sigma^2 =$$

$$p =$$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione di X in un fissato valore $x \in [0, 2)$.

$$F_1(x) =$$

6. Con riferimento all'esercizio 4, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ di Z .

$$\varphi(t) =$$

Soluzioni della prova scritta del 12/07/2008.

1. Si ha: $P(X > t) = \int_t^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-t}$; inoltre

$$\begin{aligned} P(X + Y > t) &= 1 - P(X + Y \leq t) = 1 - \int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{-x-y} dy = \\ &= 1 - \int_0^t e^{-x} (1 - e^{-t+x}) dx = 1 - \int_0^t e^{-x} dx + e^{-t} \int_0^t dx = 1 - (1 - e^{-t}) + te^{-t} = (1+t)e^{-t}. \end{aligned}$$

Infine, osservando che $(X > t)$ implica $(X + Y > t)$ si ha

$$p = P(X > t | X + Y > t) = \frac{P(X > t, X + Y > t)}{P(X + Y > t)} = \frac{P(X > t)}{P(X + Y > t)} = \frac{e^{-t}}{(1+t)e^{-t}} = \frac{1}{1+t}.$$

2. Si ha $T = X + Y$, con $S_T(t) = P(T > t) = P(X + Y > t) = (1+t)e^{-t}$, per ogni $t > 0$. Allora, indicando con f_T la densità di probabilità di T , si ha $f_T(t) = -S_T'(t) = \dots = te^{-t}$ (distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = 1$). Pertanto, per ogni $t > 0$, si ha

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{te^{-t}}{(1+t)e^{-t}} = \frac{t}{1+t}.$$

3. Si ha

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}} dy = \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}, \quad \forall x, \\ f_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}} dx = \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad \forall y, \end{aligned}$$

con $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x, y) . Pertanto X ha una distribuzione normale di parametri $m_1 = 1, \sigma_1 = 1$, mentre Y ha una distribuzione normale standard; inoltre, X ed Y sono stocasticamente indipendenti. Allora

$$\begin{aligned} p &= P(X > 1, Y > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = [1 - P(X \leq 1)][1 - P(Y \leq 1)] = \\ &= [1 - \Phi(1 - 1)][1 - \Phi(1)] = [1 - \Phi(0)][1 - \Phi(1)] \simeq 0.5 \times (1 - 0.8413) = 0.07935. \end{aligned}$$

4. Si ha: $C_Z = \{0, 6, 10\}$, con $P(Z = 0) = \frac{1}{5}, P(Z = 6) = P(Z = 10) = \frac{2}{5}$. Pertanto

$$m = 0 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} + 10 \cdot \frac{2}{5} = \frac{32}{5}; \quad \mathbb{P}(Z^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{5} + 6^2 \cdot \frac{2}{5} + 10^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{272}{5}; \quad \sigma^2 = \frac{272}{5} - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{336}{25}.$$

Inoltre, posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si ha

$$p = P(Z > 0 | Y \leq 0) = \frac{p(-2, -2) + p(2, -2)}{p(0, 0) + p(-2, -2) + p(2, -2)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}.$$

5. Si ha: $X \in \{-2, 0, 2\}$, con $P(X = 0) = \frac{1}{5}, P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{2}{5}$; pertanto, per $0 \leq x < 2$, risulta: $F_1(x) = P(X \leq x) = P(X = -2) + P(X = 0) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

6. Ricordando che $Z \in \{0, 6, 10\}$, con $P(Z = 0) = \frac{1}{5}, P(Z = 6) = P(Z = 10) = \frac{2}{5}$, si ha

$$\varphi(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \sum_h p_h e^{ith} = \frac{1}{5}(1 + 2e^{6it} + 2e^{10it}).$$