Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr., V.O. - Roma* - 18/7/2006)

1. Tre dispositivi, d_1, d_2, d_3, sono stati prodotti da tre macchine di qualità differente M_1, M_2, M_3. Assumendo che gli eventi $E_i =$ "*d_i è non difettoso*", $i = 1, 2, 3$, siano stocasticamente indipendenti e con probabilità rispettive $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, calcolare la probabilità p che solo due dei tre dispositivi siano non difettosi, supposto che almeno due siano non difettosi.

   $p =$

2. La funzione di ripartizione di un numero aleatorio continuo X è $F(x) = 1 - e^{-5x}$, per $x \geq 0$, con $F(x) = 0$, per $x < 0$. Posto $Y = 3X$, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(Y > 15 \,|\, Y > 9)$.

   $\alpha =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, fissato un valore $y > 0$, calcolare la funzione di sopravvivenza $S_Y(y)$ e la funzione di rischio $h_Y(y)$.

   $S_Y(y) =$ $\qquad\qquad$ $h_Y(y) =$

4. Il codominio di un vettore aleatorio discreto (X, Y) è l'insieme

   $$\mathcal{C} = \{(-2,-1)\,,\,(-2,1)\,,\,(0,-1)\,,\,(0,0)\,,\,(0,1)\,,\,(2,-1)\,,\,(2,1)\}\,.$$

   Posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si assuma: (i) $p(0,0) = \frac{1}{2}$; (ii) tutti gli altri punti sono equiprobabili. Calcolare la covarianza di X, Y e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $Cov(X, Y) =$ $\qquad\qquad$ X, Y *indipendenti*?

5. Il coefficiente di correlazione ρ di due numeri aleatori X, Y è $\frac{1}{3}$. Inoltre, le funzioni caratteristiche di X e Y sono rispettivamente $\varphi_X(t) = e^{it - \frac{t^2}{2}}$ e $\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{8}}$. Calcolare la varianza del numero aleatorio $Z = X - Y$.

   $Var(Z) =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-2x^2 - \frac{y^2}{2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(X > \frac{1}{2}, Y > -1)$.

   $p =$

Calcolo delle probabilità (Ing. Amb. Terr., V.O. - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 18/7/2006.

1. Osservando che

$$(E_1E_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3) \wedge (E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = (E_1E_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3)\,,$$

si ha

$$p = P[(E_1E_2E_3^c \ \vee \ E_1E_2^cE_3 \ \vee \ E_1^cE_2E_3) \mid (E_1E_2 \ \vee \ E_1E_3 \ \vee \ E_2E_3)] =$$

$$= \frac{P(E_1E_2E_3^c \ \vee \ E_1E_2^cE_3 \ \vee \ E_1^cE_2E_3)}{P(E_1E_2 \ \vee \ E_1E_3 \ \vee \ E_2E_3)} = \frac{P(E_1E_2E_3^c) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3)}{P(E_1E_2E_3^c) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3) + P(E_1E_2E_3)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{13}{25}\,.$$

2. Si ha

$$\alpha = P(Y > 15 \,|\, Y > 9) = \frac{P(Y > 15\,,\, Y > 9)}{P(Y > 9)} = \frac{P(Y > 15)}{P(Y > 9)} =$$

$$= \frac{P(X > 5)}{(X > 3)} = \frac{1 - F(5)}{1 - F(3)} = \cdots = P(X > 2) = e^{-10}\,.$$

3. Si ha

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(3X > y) = P\left(X > \frac{y}{3}\right) = S_X\left(\frac{y}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}y}\,.$$

Inoltre, indicando con g la densità di Y e osservando che $g(y) = -S_Y'(y)$, si ha

$$h_Y(y) = -\frac{S_Y'(y)}{S_Y(y)} = -\frac{-\frac{5}{3}e^{-\frac{5}{3}y}}{e^{-\frac{5}{3}y}} = \frac{5}{3}\,.$$

(*Infatti, Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{5}{3}$*)

4. Posto $p(x, y) = p$, per $(x, y) \neq (0, 0)$, si ha $\frac{1}{2} + 6p = 1$ e quindi $p = \frac{1}{12}$. Inoltre

$$X \in \{-2, 0, 2\}\,, \quad Y \in \{-1, 0, 1\}\,, \quad XY \in \{-2, 0, 2\}\,,$$

con

$$P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}\,, \quad P(X = 0) = \frac{2}{3}\,;$$

$$P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{4}\,, \quad P(Y = 0) = \frac{1}{2}\,;$$

$$P(XY = -2) = P(XY = 2) = \frac{1}{6}\,, \quad P(XY = 0) = \frac{2}{3}\,.$$

Pertanto $I\!P(X) = I\!P(Y) = I\!P(XY) = 0$ e quindi $Cov(X,Y) = 0$. Inoltre, osservando ad esempio che

$$P(X=0,Y=0) = \frac{1}{2} \neq P(X=0)P(Y=0) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

segue che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

5. Si ha $Var(Z) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$, inoltre

$$\varphi'_X(t) = (i-t)e^{it-\frac{t^2}{2}}, \qquad \varphi'_Y(t) = -\frac{t}{4}e^{-\frac{t^2}{8}};$$

$$\varphi''_X(t) = (i-t)^2e^{it-\frac{t^2}{2}} - e^{it-\frac{t^2}{2}}, \qquad \varphi''_Y(t) = \frac{t^2}{16}e^{-\frac{t^2}{8}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{t^2}{8}}.$$

Quindi

$$\varphi'_X(0) = i = iI\!P(X), \quad \varphi'_Y(0) = 0 = iI\!P(Y).$$

$$\varphi''_X(0) = i^2 - 1 = -2 = i^2I\!P(X^2), \quad \varphi''_Y(0) = -\frac{1}{4} = i^2I\!P(Y^2).$$

Pertanto

$$I\!P(X) = 1, \quad I\!P(Y) = 0, \quad I\!P(X^2) = 2, \quad I\!P(Y^2) = \frac{1}{4}.$$

Allora

$$Var(X) = I\!P(X^2) - [I\!P(X)]^2 = 1, \quad Var(Y) = I\!P(Y^2) - [I\!P(Y)]^2 = \frac{1}{4},$$

$$Cov(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

da cui segue $Var(Z) = 1 + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{12}$.
(La stessa conclusione si ottiene osservando direttamente che dalla struttura delle funzioni caratteristiche segue $X \sim N_{1,1}$, $Y \sim N_{0,\frac{1}{2}}$)

6. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}e^{-2x^2-\frac{y^2}{2}}\,dy = \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x^2}, \ \ \forall x,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}e^{-2x^2-\frac{y^2}{2}}\,dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, \ \ \forall y,$$

con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, X ha una distribuzione normale di parametri $m_1 = 0, \sigma_1 = \frac{1}{2}$, mentre Y ha una distribuzione normale standard. Allora

$$p = P\left(X > \frac{1}{2}, Y > -1\right) = P\left(X > \frac{1}{2}\right)P(Y > -1) = \left[1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)\right][1 - P(Y \leq -1)] =$$

$$= \left[1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}}\right)\right][1-\Phi(-1)] = [1-\Phi(1)]\Phi(1) \simeq (1-0.8413)\times 0.8413 \simeq 0.1335.$$