Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - V.O. - Roma* - 10/1/2006)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Sia data una costante $a \in (0, 2)$. Stabilire per quale valore di a la funzione $f(x) = x$, per $x \in [0, a]$, $f(x) = a$, per $x \in (a, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Calcolare inoltre la probabilità α dell'evento $(X > 1)$.

   $a =$ $\alpha =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente e utilizzando il valore trovato per a, dato un numero aleatorio X con densità $f(x)$, determinare la funzione di ripartizione di X.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. Da un'urna, contenente 1 pallina bianca e 4 nere, si effettuano n estrazioni con restituzione. Indicando con X il numero aleatorio di volte in cui esce pallina bianca e con h un valore possibile di X, calcolare la probabilità $p_h = P(X = h)$. Inoltre, considerando l'evento $E_1 =$ *"nella* 1^a *estrazione esce pallina bianca"*, calcolare la probabilità condizionata $\gamma = P(E_1|X \geq 1)$.

   $p_h =$ $\gamma =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione generatrice $\psi(t)$ (oppure la funzione caratteristica $\phi(t)$) di X.

   $\psi(t) =$ $(\phi(t) =$ $)$

5. Un sistema S è costituito da tre dispositivi in parallelo, con tempi di durata aleatoria fino al guasto rispettivamente X, Y, Z, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Calcolare la previsione del tempo aleatorio T di durata fino al guasto di S.

   $\mathbb{P}(T) =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di rischio $h(t)$ del numero aleatorio T, per ogni $t > 0$.

   $h(t) =$

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - V.O. - Roma*)

Soluzioni della prova scritta del 10/1/2006.

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero

$$\int_0^a x dx + \int_a^2 a dx = \cdots = \frac{a^2}{2} + a(2-a) = 1\,.$$

Allora, ricordando che $0 < a < 2$, segue: $a = 2 - \sqrt{2}$. Infine

$$\alpha = P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 (2-\sqrt{2})\, dx = 2 - \sqrt{2}\,.$$

2. Per $x \leq 0$ si ha $F(x) = 0$; per $x \in (0, 2-\sqrt{2}]$ si ha

$$F(x) = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}\,;$$

per $x \in (2-\sqrt{2}, 2)$ si ha

$$F(x) = \int_0^{2-\sqrt{2}} t\, dt + \int_{2-\sqrt{2}}^x (2-\sqrt{2})\, dt = \cdots = (2-\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}\,;$$

per $x \geq 2$ si ha $F(x) = 1$.

3. X ha una distribuzione binomiale $B(n, \frac{1}{5})$; pertanto

$$p_h = P(X = h) = \binom{n}{h} \left(\frac{1}{5}\right)^h \left(\frac{4}{5}\right)^{n-h} \quad , \quad h = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Inoltre

$$\gamma = P(E_1 | X \geq 1) = \frac{P[E_1 \wedge (X \geq 1)]}{P(X \geq 1)} = \frac{P(E_1)}{1 - P(X=0)} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{5^{n-1}}{5^n - 4^n}\,.$$

4. Si ha

$$\psi(t) = I\!P(t^X) = \sum_{h=0}^n p_h\, t^h = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \left(\frac{1}{5}\, t\right)^h \left(\frac{4}{5}\right)^{n-h} = \left(\frac{1}{5}\, t + \frac{4}{5}\right)^n\,;$$

$$\phi(t) = I\!P(e^{itX}) = \sum_{h=0}^n p_h\, e^{ith} = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \left(\frac{1}{5}\, e^{it}\right)^h \left(\frac{4}{5}\right)^{n-h} = \left(\frac{1}{5}\, e^{it} + \frac{4}{5}\right)^n\,.$$

5. Per ogni fissato $t > 0$, si ha

$$P(X \leq t) = P(Y \leq t) = P(Z \leq t) = 1 - e^{-2t}\,.$$

Allora

$$P(T \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t, Z \leq t) = P(X \leq t)P(Y \leq t)P(Z \leq t) = (1 - e^{-2t})^3\,,$$

con $P(T \leq t) = 0$, per ogni $t \leq 0$. Pertanto, la densità di probabilità di T è

$$f(t) = 6e^{-2t}(1 - e^{-2t})^2 = 6e^{-2t} - 12e^{-4t} + 6e^{-6t}\,,$$

per $t > 0$, con $f(t) = 0$ altrove. Quindi:

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = 3\int_0^{+\infty} t \cdot 2e^{-2t} dt - 3\int_0^{+\infty} t \cdot 4e^{-4t} dt + \int_0^{+\infty} t \cdot 6e^{-6t} dt =$$

$$= 3 \cdot \tfrac{1}{2} - 3 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{11}{12}\,.$$

Nota: $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{12}$.

6. Per ogni $t > 0$, si ha

$$S(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - (1 - e^{-2t})^3 = 3e^{-2t} - 3e^{-4t} + e^{-6t}\,;$$

pertanto

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{6e^{-2t} - 12e^{-4t} + 6e^{-6t}}{3e^{-2t} - 3e^{-4t} + e^{-6t}} = \frac{6e^{4t} - 12e^{2t} + 6}{3e^{4t} - 3e^{2t} + 1}\,, \quad \forall\, t > 0\,,$$

con $h(t) = 0$ altrove.