

**Calcolo delle probabilità** (Ing. Amb. Terr. - V.O. - Roma - 18/2/2006)

Scrivere le risposte negli appositi spazi  
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Da un lotto contenente 5 pezzi, di cui 2 difettosi, si prelevano a caso 3 pezzi. Sia  $H_r$  l'evento "fra i 3 pezzi prelevati dal lotto ce ne sono  $r$  difettosi",  $r = 0, 1, 2$ . Calcolare  $p = P(H_2)$ . Successivamente, viene esaminato a caso uno dei 3 pezzi prelevati dal lotto. Sia  $E$  l'evento "il pezzo esaminato risulta difettoso". Calcolare  $\gamma = P(H_2|E)$ .

$$p = \qquad \qquad \qquad \gamma =$$

2. Sia data una costante  $a \in (0, 1)$ . Stabilire per quale valore di  $a$  la funzione  $f(x) = \frac{x}{3}$ , per  $x \in [0, 3a]$ ,  $f(x) = a$ , per  $x \in (3a, 3]$ , con  $f(x) = 0$  altrove, è una densità di probabilità. Calcolare inoltre la probabilità  $\alpha$  dell'evento  $(X > 3 - \sqrt{3})$ .

$$a = \qquad \qquad \qquad \alpha =$$

3. Con riferimento all'esercizio precedente e utilizzando il valore trovato per  $a$ , dato un numero aleatorio  $X$  con densità  $f(x)$ , determinare la funzione di ripartizione di  $X$ .

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} \qquad \qquad \qquad , \\ \qquad \qquad \qquad , \\ \qquad \qquad \qquad , \\ \qquad \qquad \qquad , \end{array} \right.$$

4. Siano  $X$  e  $Y$  due numeri aleatori continui, con coefficiente di correlazione  $\rho = -\frac{1}{2}$  e con densità di probabilità  $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f_2(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-5)^2}{18}}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Calcolare la varianza di  $X - Y$  e l'equazione della retta di regressione di  $Y$  su  $X$ .

$$Var(X - Y) = \qquad \qquad \qquad y =$$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica  $\varphi_Z(t)$  del numero aleatorio  $Z = \frac{X-1}{2}$ . (Ricordiamo che per una distribuzione normale, con parametri  $m, \sigma$ , risulta  $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ ).

$$\varphi_Z(t) =$$

6. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio  $\Theta$  è normale con parametri  $m_0 = 3$ ,  $\sigma_0 = 2$ . Le componenti di un campione casuale  $(X_1, X_2, X_3)$ , subordinatamente ad ogni fissato valore  $\theta$  di  $\Theta$ , hanno una distribuzione normale con valor medio  $\theta$  e scarto standard  $\sigma = 1$ . Supposto di aver osservato un campione casuale  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , con  $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ , stabilire per quale valore  $\theta_0$  risulta  $P(\Theta > \theta_0 | \mathbf{x}) = \Phi(2)$ .

$$\theta_0 =$$

**Calcolo delle probabilità** (Ing. Amb. Terr. - V.O. - Roma)

*Soluzioni della prova scritta del 18/2/2006.*

1. Si ha

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Pertanto  $p = P(H_2) = \frac{3}{10}$ . Inoltre

$$\gamma = P(H_2|E) = \frac{P(E|H_2)P(H_2)}{P(E|H_0)P(H_0)+P(E|H_1)P(H_1)+P(E|H_2)P(H_2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10}}{0 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10}} = \frac{1}{2}.$$

2. Dev'essere  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ ; ovvero

$$\int_0^{3a} \frac{x}{3} dx + \int_{3a}^3 a dx = \dots = \frac{3a^2}{2} + a(3 - 3a) = 1.$$

Allora, ricordando che  $0 < a < 1$ , segue:  $a = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ . Infine, osservando che  $3a = 3 - \sqrt{3}$  e che  $f(x) = a$ , per  $x \in (3a, 3]$ , si ha

$$\alpha = P(X > 3 - \sqrt{3}) = P(X > 3a) = \int_{3a}^3 a dx = a(3 - 3a) = \dots = \sqrt{3} - 1.$$

3. Per  $x \leq 0$  si ha  $F(x) = 0$ ; per  $x \in (0, 3 - \sqrt{3}]$  si ha

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{3} dt = \frac{x^2}{6};$$

per  $x \in (3 - \sqrt{3}, 3)$  si ha

$$F(x) = \int_0^{3-\sqrt{3}} \frac{t}{3} dt + \int_{3-\sqrt{3}}^x \frac{3-\sqrt{3}}{3} dt = \dots = \frac{3-\sqrt{3}}{3} x - 2 + \sqrt{3};$$

per  $x \geq 3$  si ha  $F(x) = 1$ .

4.  $X$  e  $Y$  hanno distribuzione normale con parametri  $m_1 = 1$ ,  $\sigma_1 = 2$ ,  $m_2 = 5$ ,  $\sigma_2 = 3$ .  
Pertanto

$$\text{Var}(X - Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 4 + 9 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot 3 = 19.$$

Inoltre

$$y = m_2 + \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1) = -\frac{3}{4}x + \frac{23}{4}.$$

5. Essendo  $Z$  una funzione lineare di  $X$ , la sua distribuzione è ancora normale con parametri

$$m_Z = \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{2}\right) = 0, \quad \sigma_Z = \frac{1}{2}\sigma_X = 1;$$

ovvero  $Z$  ha una distribuzione normale standard. Pertanto:  $\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

6. Si ha  $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_3, \sigma_3}$ , con  $m_3 = m_0 = 3$  in quanto  $\bar{x} = m_0 = 3$ . Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4},$$

e quindi  $\sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ; pertanto  $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{3, \frac{2}{\sqrt{13}}}$ . Allora

$$P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = 1 - \Phi_{3, \frac{2}{\sqrt{13}}}(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - 3}{\frac{2}{\sqrt{13}}}\right) = \Phi\left(-\frac{\theta_0 - 3}{\frac{2}{\sqrt{13}}}\right) = \Phi(2),$$

da cui segue:  $\theta_0 = m_3 - 2\sigma_3 = 3 - \frac{4}{\sqrt{13}}$ .