Calcolo delle probabilità (9/5/2003) *(Ing. Amb. Terr. - V.O. - Roma)*

1. Da un lotto contenente 2 pezzi buoni e 4 difettosi si estraggono senza restituzione 3 pezzi. Sia E_i l'evento *"l'i-mo pezzo estratto è difettoso"*. Posto $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$, calcolare la previsione m e la varianza σ^2 di X. Calcolare, inoltre, per ogni possibile valore x di X la probabilità p_x dell'evento $(X = x)$.

$$m = \qquad\qquad \sigma^2 = \qquad\qquad \begin{cases} x : \qquad , \qquad , \\ \\ p_x : \qquad , \qquad , \end{cases}$$

2. Da una stanza S_1, in cui ci sono 3 uomini e 2 donne, una persona a caso si sposta in una stanza S_2, in cui inizialmente c'erano 2 uomini e 3 donne. Successivamente da S_2 esce a caso una persona. Considerati gli eventi $E =$ *"la persona uscita da S_2 è una donna"*, $H =$ *"la persona entrata in S_2 è un uomo"*, stabilire se E ed H sono stocasticamente indipendenti.

Stocasticamente indipendenti?

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è data da $f(x, y) = \frac{3}{2}xy$, per $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare: (i) la densità marginale $f_1(x)$, per ogni $x \in [0, 2]$; (ii) la probabilità p che almeno uno dei due numeri aleatori X, Y sia maggiore di 1.

$$f_1(x) = \qquad\qquad p =$$

4. Cinque amici, in seguito ad un appuntamento, arrivano a caso in una località L nell'intervallo temporale [0,6]. Calcolare la probabilità γ che esattamente 2 amici arrivino nell'intervallo [0,2] e 2 arrivino nell'intervallo [3,6]. Inoltre, indicato con T_5 l'istante aleatorio in cui l'ultimo dei 5 amici arriva in L, calcolare la previsione $\mathbb{P}(T_5)$.

$$\gamma = \qquad\qquad \mathbb{P}(T_5) =$$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è data da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{250} e^{-[\frac{1}{10}(x-40) + \frac{1}{25}y]} & \text{per } x \geq 40\,,\ y \geq 0\,; \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di X.

$$S_1(x) = \qquad\qquad h_1(x) =$$

6. Rispondere SI o NO alle seguenti domande, motivando le risposte.

- Un sistema S, costituito da tre dispositivi in serie A, B e C, entra in funzione nell'istante 0. I tempi (misurati in anni) fino al guasto di A, B e C sono tre numeri aleatori T_1, T_2 e T_3, indipendenti e ugualmente distribuiti, con
$$P(T_1 > t) = P(T_2 > t) = P(T_3 > t) = e^{-t}\ ,\ \ \forall\, t > 0\ .$$
Indicando con X il tempo aleatorio fino al guasto di S e con m la sua previsione, si ha $m = 3$, ovvero S funziona mediamente per 3 anni.
- Dato un processo di Poisson e indicato con N_t il numero aleatorio di arrivi in $[0, t)$, la probabilità dell'evento condizionato $(N_2 = 5|N_4 = 5)$ è uguale a $\frac{1}{32}$.

Calcolo delle probabilità (9/5/2003) *(Ing. Amb. Terr. - V.O. - Roma)*

Soluzioni

1. Il numero aleatorio X ha distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 6$, $n = 3$, $p = \frac{2}{3}$. Pertanto
$$m = np = 2\,; \qquad \sigma^2 = npq(1 - \frac{n-1}{N-1}) = \frac{2}{5}\,\cdot$$
Inoltre $X \in \{1, 2, 3\}$, con
$$p_x = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}\,, \qquad x = 1, 2, 3.$$
Pertanto: $p_1 = \frac{1}{5}\,, \quad p_2 = \frac{3}{5}\,, \quad p_3 = \frac{1}{5}\,.$

2. Si ha $P(H) = \frac{3}{5}$. Inoltre
$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}} = \cdots = \frac{9}{17} \neq P(H)\,\cdot$$
Pertanto, E ed H non sono stocasticamente indipendenti.

3. Si ha
$$f_1(x) = \int_0^{2-x} \frac{3}{2}xydy = \frac{3}{2}x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} = \cdots = \frac{3}{4}(4x - 4x^2 + x^3).$$
Inoltre
$$p = P[(X > 1) \vee (Y > 1)] = 1 - P(X \leq 1, Y \leq 1) = 1 - \int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{2}xydxdy = \cdots = \frac{5}{8}.$$

4. Utilizzando la distribuzione multinomiale di parametri

$$n = 5\,, \quad p_o = \frac{1}{3}\,, \quad p_1 = \frac{1}{6}\,, \quad p_2 = \frac{1}{2}\,,$$

si ha

$$\gamma \;=\; \frac{5!}{2!1!2!} \cdot p_o^2 p_1^1 p_2^2 \;=\; 30 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; \frac{5}{36}\,.$$

Inoltre, osserviamo che:
1) T_5 coincide con la statistica d'ordine $X_{(5)}$;
2) le lacune $L_1, \ldots, L_6$ sono ugualmente distribuite ed essendo $\sum_{i=1}^{6} L_i = 6$ si ha $I\!P(L_i) = 1\,,\ \ i = 1, \ldots, 6$;
3) $T_5 = L_1 + \cdots + L_5$.
Allora, si ottiene

$$I\!P(T_5) \;=\; I\!P(L_1) + \cdots + I\!P(L_5) \;=\; 5 \;=\; 6 - I\!P(L_6)\,.$$

5. Si ha, per ogni $x \geq 40$,

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{250} e^{-[\frac{1}{10}(x-40)+\frac{1}{25}y]} dy = \cdots = \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}(x-40)}\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto, per ogni $x \geq 40$,

$$S_1(x) = \textstyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}(t-40)} dt = \cdots = e^4 e^{-\frac{1}{10}x} = e^{-\frac{1}{10}(x-40)}\,,$$

$$h_1(x) = \tfrac{f_1(x)}{S_1(x)} = \tfrac{1}{10}\,.$$

Inoltre, per $x < 40$, si ha

$$S_1(x) = 1\,, \qquad h_1(x) = 0\,.$$

6.
- Si ha

  $$P(X > t) = P(T_1 > t,\, T_2 > t,\, T_3 > t) = P(T_1 > t)P(T_2 > t)P(T_3 > t) = e^{-3t}\,,\ \ \forall\, t > 0\,,$$

  e quindi X ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$, da cui segue $m = \frac{1}{3}$, ovvero il tempo medio di funzionamento di S è di 4 mesi.

- Osservando che $N_2 \,|\, (N_4 = 5) \;\sim\; B(5, \frac{1}{2})$, si ottiene

  $$P(N_2 = 5 | N_4 = 5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\,.$$