Probabilità e Statistica I (11/7/2005)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Da un'urna, contenente inizialmente 1 pallina bianca e 1 nera, si effettuano estrazioni con restituzione, aggiungendo ogni volta nell'urna una pallina di colore opposto a quello della pallina estratta. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, \ldots$, calcolare la funzione di ripartizione del numero aleatorio discreto $X = |E_1| + |E_2|$.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

2. Le densità marginali di un vettore aleatorio (X, Y) sono

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}, \quad f_2(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-5}{3}\right)^2}, \quad x \in I\!R, \; y \in I\!R.$$

Inoltre, il coefficiente di correlazione di X, Y è $\rho = -\frac{1}{6}$. Posto $U = 2X$, $V = X + Y$, calcolare la varianza di $U - V$.

$$Var(U - V) =$$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = x + y$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

X, Y *indipendenti* ?

4. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono incorrelati.

X, Y *incorrelati* ?

5. Un sistema S è costituito da un dispositivo D_1 in serie con un modulo M formato da due dispositivi D_2, D_3 in parallelo. I dispositivi entrano in funzione in tre istanti aleatori T_1, T_2, T_3 indipendenti e con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 1]$. Fissato $t \in (0, 1)$, calcolare la probabilità α_t dell'evento E = "il sistema entra in funzione nell'intervallo $[0, t]$". (*Si consiglia di rappresentare E mediante gli eventi* $A_i = (T_i \leq t)$, $i = 1, 2, 3$.)

$$\alpha_t =$$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 11/7/2005.

1. Si ha $X \in \{0, 1, 2\}$, con

$$P(X=0) = P(E_1^c E_2^c) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,;$$

$$P(X=1) = P(E_1 E_2^c \vee E_1^c E_2) = P(E_1 E_2^c) + P(E_1^c E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,;$$

$$P(X=2) = P(E_1 E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ \frac{1}{6}\,, & 0 \le x < 1\,, \\ \frac{5}{6}\,, & 1 \le x < 2\,, \\ 1\,, & x \ge 2\,. \end{cases}$$

2. X ed Y hanno una distribuzione normale di parametri rispettivamente $m_1 = 1$, $\sigma_1 = 2$, $m_2 = 5$, $\sigma_2 = 3$. Inoltre: $U - V = X - Y\,,\ \ Cov(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2 = -\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = -1$.
Allora: $Var(U - V) = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 15$.

3. Si ha $f_1(x) = f_2(y) = 0$, per $x \notin [0,1]$, $y \notin [0,1]$; inoltre

$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)dy = \cdots = x + \frac{1}{2}\,,\ \ x \in [0,1]\,; \quad f_2(y) = \int_0^1 (x+y)dx = \cdots = y + \frac{1}{2}\,,\ \ y \in [0,1]\,.$$

Pertanto $f(x,y) \ne f_1(x)f_2(y)$ e quindi X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

4. Essendo $f_1 = f_2$, si ha

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx = \int_0^1 x(x + \frac{1}{2})dx = \cdots = \frac{7}{12}\,;$$

inoltre

$$\mathbb{P}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy = \cdots = \frac{1}{3}\,.$$

Allora

$$Cov(X,Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144} < 0\,.$$

Pertanto X e Y sono correlati negativamente.
(*Nota: si ha* $Var(X) = Var(Y) = \frac{11}{144}$*; quindi* $\rho = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}$.)

5. Si ha $E = A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) = A_1A_2 \vee A_1A_3$; inoltre $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = t$. Allora

$$\alpha_t = P(E) = P(A_1A_2 \vee A_1A_3) = P(A_1A_2) + P(A_1A_3) - P(A_1A_2A_3) =$$
$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = t^2(2-t)\,.$$