Probabilità e Statistica I (18/5/2006)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Da un lotto contenente 6 pezzi, di cui 2 difettosi, si prelevano a caso 3 pezzi. Sia H_r l'evento *"fra i 3 pezzi prelevati dal lotto ce ne sono r difettosi"*, $r = 0, 1, 2$. Successivamente, viene esaminato a caso uno dei 3 pezzi prelevati dal lotto. Sia E l'evento *"il pezzo esaminato risulta difettoso"*. Calcolare la probabilità p che al massimo uno dei 3 pezzi prelevati dal lotto sia difettoso, supposto che il pezzo esaminato sia buono.

$$p =$$

2. Dati due eventi A e B, stocasticamente indipendenti e con $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |A \vee B| - |AB|$.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. Due veicoli A e B, distanti inizialmente 1 km, a partire da un certo istante si muovono l'uno verso l'altro con velocità (in km/h) aleatorie X e Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 4xy$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità p che A e B impieghino più di un'ora per incontrarsi.

$$p =$$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare il coefficiente di correlazione di X e Y.

$$\rho =$$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 18/5/2006.

1. Si ha

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,;$$

$$P(E\,|\,H_0) = 0\,, \quad P(E\,|\,H_1) = \frac{1}{3}\,, \quad P(E\,|\,H_2) = \frac{2}{3}\,.$$

Quindi: $P(E^c\,|\,H_0) = 1\,, \quad P(E^c\,|\,H_1) = \frac{2}{3}\,, \quad P(E^c\,|\,H_2) = \frac{1}{3}$. Pertanto

$$P(E^c) = P(E^c\,|\,H_0)P(H_0) + P(E^c\,|\,H_1)P(H_1) + P(E^c\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{3}\,.$$

Inoltre

$$P(H_0\,|\,E^c) = \frac{P(E^c|H_0)P(H_0)}{P(E^c)} = \cdots = \frac{3}{10}\,; \quad P(H_1\,|\,E^c) = \frac{P(E^c|H_1)P(H_1)}{P(E^c)} = \cdots = \frac{3}{5}\,.$$

Allora: $p = P(H_0 \vee H_1\,|\,E^c) = P(H_0\,|\,E^c) + P(H_1\,|\,E^c) = \frac{9}{10}$.

2. Si ha $X \in \{0,1\}$, con $(X=0) = AB \vee A^cB^c\,, \quad (X=1) = AB^c \vee A^cB\,$; quindi

$$P(X=0) = P(AB) + P(A^cB^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(X=1) = P(AB^c) + P(A^cB) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

3. A e B si muovono l'uno verso l'altro con velocità $X+Y$, incontrandosi dopo un tempo aleatorio (misurato in ore) $T = \frac{1}{X+Y}$. Pertanto

$$P(T \ge 1) = P\left(\frac{1}{X+Y} \ge 1\right) = P(X+Y \le 1) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 4xy\,dy = \cdots = \frac{1}{6}\,.$$

4. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^1 4xy\,dy = \cdots = 2x\,, \;\; 0 \le x \le 1\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Analogamente

$$f_2(y) = \int_0^1 4xy\,dx = \cdots = 2y\,, \;\; 0 \le y \le 1\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,, \quad \forall\,(x,y)\,$; ovvero X e Y sono stocasticamente indipendenti. Quindi $\rho = 0$.