Probabilità e Statistica I (20/6/2006)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Un lotto contenente 7 pezzi (2 difettosi e 5 buoni) viene diviso a caso in due lotti L_1 ed L_2, contenenti rispettivamente 3 pezzi e 4 pezzi. Successivamente, da ciascuno dei due lotti si estrae a caso un pezzo. Definiti gli eventi $A =$ *"il pezzo estratto da L_1 è difettoso"*, $B =$ *"il pezzo estratto da L_2 è difettoso"*, verificare se $P(A) = P(B)$.
   (*N.B.: utilizzare gli eventi $H_r =$ "il lotto L_1 contiene r pezzi difettosi"*, $r = 0, 1, 2$).

   $P(A) = P(B)$?

2. Dati tre eventi A, B e C, con $AB = \emptyset$, $A \vee B \subset C$, e con $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{5}{6}$, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |A| + B| - 2|C|$.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. Due automobili A e B, posizionate inizialmente nell'origine e nel punto di ascissa 4, iniziano a muoversi in contemporanea nel verso positivo dell'asse delle ascisse, con velocità aleatorie rispettive $2X$ e X. Assumendo per X una distribuzione uniforme nell'intervallo $[2, 4]$, calcolare la previsione dell'istante aleatorio T in cui A raggiunge B.

   $\mathbb{P}(T) =$

4. Una struttura è sollecitata in contemporanea da due forze di entità aleatorie X e Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{2}{9}(3 - x - y)$, per $(x, y) \in C = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3\,,\; 0 \leq y \leq 3 - x\}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. La struttura cede se si verifica l'evento $(X + Y > 2)$. Calcolare la probabilità p di tale evento.

   $p =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 20/6/2006.

1. Si ha

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}\,;$$

$$P(A\,|\,H_0) = 0\,, \quad P(A\,|\,H_1) = \frac{1}{3}\,, \quad P(A\,|\,H_2) = \frac{2}{3}\,;$$

$$P(B\,|\,H_0) = \frac{2}{4}\,, \quad P(B\,|\,H_1) = \frac{1}{4}\,, \quad P(B\,|\,H_2) = 0\,.$$

Quindi:

$$P(A) = P(A\,|\,H_0)P(H_0) + P(A\,|\,H_1)P(H_1) + P(A\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{7}\,,$$

$$P(B) = P(B\,|\,H_0)P(H_0) + P(B\,|\,H_1)P(H_1) + P(B\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{7}\,.$$

Pertanto: $P(A) = P(B)$.

2. I costituenti sono:

$$C_1 = AB^cC = A,\;\; C_2 = A^cBC = B,\;\; C_3 = A^cB^cC,\;\; C_4 = A^cB^cC^c = C^c,$$

ai quali corrispondono per X rispettivamente i valori: $-1,\ -1,\ -2,\ 0$. Inoltre

$$P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{3}\,, \quad P(C_3) = P(C) - P(A \vee B) = \frac{1}{6}\,, \quad P(C_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Pertanto

$$P(X = -2) = P(C_3) = \frac{1}{6}\,, \quad P(X = -1) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{2}{3}\,, \quad P(X = 0) = P(C_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Allora

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{6}, & -2 \le x < -1 \\ \frac{5}{6}, & -1 \le x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

3. A raggiunge B nell'istante aleatorio T tale che $2XT = 4 + XT$; pertanto $T = \frac{4}{X}$. Quindi

$$I\!P(T) = \int_2^4 \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{2}\, dx = \cdots = ln\, 4\,.$$

Procedimento alternativo (*più complicato*):

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P\left(X \geq \frac{4}{t}\right) = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ 2 - \frac{2}{t}, & 1 < t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

Allora

$$f_T(t) = \frac{2}{t^2}\,, \quad 1 \leq t \leq 2\,,$$

con $f_T(t) = 0$ altrove. Pertanto

$$I\!P(T) = \int_1^2 t\, \frac{2}{t^2}\, dt = \cdots = ln\, 4\,.$$

4. Si ha $p = 1 - P(X + Y \leq 2)$, con

$$P(X + Y \leq 2) = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \frac{2}{9}(3 - x - y) dy = \cdots = \frac{2}{9} \int_0^2 (4 - 3x + \frac{x^2}{2})\, dx = \cdots = \frac{20}{27}\,.$$

Pertanto: $p = \frac{7}{27}\,.$