Probabilità e Statistica I (15/9/2006)

(Ing. Civile e Trasporti - Roma)

1. Dati tre eventi E_1, E_2, E_3, con

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{2}\,,\; P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = \frac{5}{18}\,,\; P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{6}\,,$$

calcolare la probabilità p dell'evento $E_1 \vee E_1^cE_2 \vee E_1^cE_2^cE_3$.

$$p =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2|$.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. Un sistema è costituito da due dispositivi in parallelo A e B, con B che entra in funzione nell'istante in cui si guasta A e con tempi aleatori di durata rispettivamente X e Y. Supposto che la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) sia $f(x, y) = e^{-2x-\frac{y}{2}}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove, calcolare la probabilità α_t che il sistema non si blocchi fino ad un fissato istante positivo t.

$$\alpha_t =$$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la covarianza dei numeri aleatori $U = X + Y, V = Y - X$.

$$Cov(U, V) =$$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 15/9/2006.

1. Si ha

$$P(E_1^c E_2) = P(E_2) - P(E_1E_2) = \frac{1}{2} - \frac{5}{18} = \frac{2}{9}\,; \qquad P(E_2^c E_3) = \cdots = \frac{2}{9}\,;$$

$$P(E_1E_2^cE_3) = P(E_1E_3) - P(E_1E_2E_3) = \frac{5}{18} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9}\,;$$

$$P(E_1^cE_2^cE_3) = P(E_2^cE_3) - P(E_1E_2^cE_3) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}\,.$$

Pertanto

$$p = P(E_1) + P(E_1^cE_2) + P(E_1^cE_2^cE_3) = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{6}\,.$$

2. I costituenti sono $C_1 = E_1E_2$, $C_2 = E_1E_2^c$, $C_3 = E_1^cE_2$, $C_4 = E_1^cE_2^c$, ai quali corrispondono per X rispettivamente i valori: 2, 1, 1, 0. Inoltre

$$P(C_1) = \frac{5}{18}\,,\ P(C_2) = P(C_3) = \frac{2}{9}\,,\ P(C_4) = 1 - P(C_1) - P(C_2) - P(C_3) = \frac{5}{18}\,.$$

Pertanto:

$$P(X=0) = \frac{5}{18}\,, \quad P(X=1) = \frac{4}{9}\,, \quad P(X=2) = \frac{5}{18}\,.$$

Allora

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{5}{18}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{13}{18}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

3. Si ha

$$\alpha_t = P(X+Y>t) = 1 - P(X+Y \le t) = 1 - \int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{-2x-\frac{y}{2}} dy =$$

$$= 1 - \int_0^t 2e^{-2x}(1 - e^{-\frac{t-x}{2}})dx = 1 - \int_0^t 2e^{-2x}\,dx + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t \frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}x}\,dx =$$

$$= 1 - (1 - e^{-2t}) + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}(1 - e^{-\frac{3}{2}t}) = \cdots = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\,.$$

4. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2x-\frac{y}{2}}\,dy = \cdots = 2e^{-2x}\,, \ \ x \ge 0\,,$$

$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} e^{-2x-\frac{y}{2}}\,dx = \cdots = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,, \ \ y \ge 0\,,$$

con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove. Inoltre $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Allora

$$Cov(U,V) = Cov(X+Y, Y-X) = Cov(X,Y) - Cov(X,X) + Cov(Y,Y) - Cov(Y,X) =$$

$$= -Var(X) + Var(Y) = -\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} = -\frac{1}{4} + 4 = \frac{15}{4}\,.$$