Probabilità e Statistica I (24/5/2008)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

1. Siano dati due lotti $\mathcal{A}$, contenente 1 componente difettoso e 2 buoni, e $\mathcal{B}$, contenente 2 componenti buoni. Da $\mathcal{A}$ si estraggono 2 componenti che vengono inseriti in $\mathcal{B}$; successivamente, da $\mathcal{B}$ si estrae a caso 1 componente. Definiti gli eventi $E_1 =$ *"il primo componente estratto da $\mathcal{A}$ è difettoso"*, $E_2 =$ *"il secondo componente estratto da $\mathcal{A}$ è difettoso"*, $E_3 =$ *"il componente estratto da $\mathcal{B}$ è difettoso"*, sia $X = |E_1| + |E_2|$; $Y = X + |E_3|$. Calcolare il coefficiente di correlazione di X, Y.

   $\rho =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ax^2 + by^2$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $a \geq 0, b \geq 0$, $f(x, y) = 0$ altrove. Determinare: (i) la relazione che sussiste tra a e b; (ii) i valori di a tali che $P(X > Y) > \frac{1}{2}$.

   (i) $\qquad\qquad$ (ii)

3. La distribuzione di probabilità del carico aleatorio X (in *tonn*) che grava su una struttura è normale di parametri $m = 20$, $\sigma = 0.2$. Calcolare: (i) la probabilità $p = P(X > 20.2)$; (ii) la probabilità condizionata $\alpha = P(X > 20 \,|\, 19.8 < X \leq 20.2)$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

4. Sia T il tempo aleatorio di durata (in ore) di un sistema S formato da due dispositivi in parallelo a e b, con rispettivi tempi aleatori di durata X e Y. Il dispositivo b entra in funzione nell'istante in cui si guasta a; inoltre X e Y hanno una distribuzione di probabilità esponenziale di parametri λ_1, λ_2. Fissato un valore positivo τ e indicando con λ_a la media armonica di λ_1, λ_2, calcolare i valori di λ_a tali che si abbia $\mathbb{P}(T) > \tau$.

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 24/5/2008.

1. Si ha

$$(X,Y) \in \{(0,0),(1,1),(1,2)\}\,,\quad X \in \{0,1\}\,,\quad Y \in \{0,1,2\}\,,\quad XY \in \{0,1,2\}\,;$$

posto $P(X=x, Y=y) = p(x,y)$ si ottiene

$$p(0,0) = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = P(E_1^c E_2^c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,$$

$$p(1,1) = P(E_1 E_2^c E_3^c) + P(E_1^c E_2 E_3^c) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\,,$$

$$p(1,2) = P(E_1 E_2^c E_3) + P(E_1^c E_2 E_3) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}\,.$$

Allora

$$P(X=0) = p(0,0) = \frac{1}{3}\,,\quad P(X=1) = p(1,1)+p(1,2) = \frac{2}{3} = I\!P(X)\,;$$

$$P(Y=0) = P(XY=0) = p(0,0) = \frac{1}{3}\,,\ P(Y=1) = P(XY=1) = p(1,1) = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(Y=2) = P(XY=2) = p(1,2) = \frac{1}{6}\,;\quad I\!P(Y) = I\!P(XY) = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{6}\,.$$

Allora: $Cov(X,Y) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{18}$. Inoltre

$$I\!P(X^2) = 0^2\cdot\frac{1}{3} + 1^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,,\quad Var(X) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}\,,$$

$$I\!P(Y^2) = 0^2\cdot\frac{1}{3} + 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{6}\,,\quad Var(Y) = \frac{7}{6} - \frac{25}{36} = \frac{17}{36}\,.$$

Pertanto: $\rho = \frac{\frac{5}{18}}{\sqrt{\frac{2}{9}\cdot\frac{17}{36}}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \simeq 0.8575$.

2. Si ha

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 (ax^2+by^2)dxdy = \cdots = \frac{a}{3} + \frac{b}{3} = 1\,;$$

pertanto, dev'essere: $a+b=3$; quindi $f(x,y) = ax + (3-a)y$, con $0 \le a \le 3$. Inoltre

$$P(X>Y) = \int_0^1\int_0^x f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^x (ax^2+by^2)dxdy = \cdots = \frac{1}{4}(a+\frac{b}{3}) = \frac{1}{4}(1+\frac{2a}{3})\,,$$

e si ha: $\frac{1}{4}(1+\frac{2a}{3}) > \frac{1}{2} \iff \frac{3}{2} < a \le 3$.

3. Si ha

$$p = 1 - P(X \le 20.2) = 1 - \Phi_{20,0.2}(20.2) = 1 - \Phi\left(\frac{20.2 - 20}{0.2}\right) = 1 - \Phi(1) \;\simeq\; 0.1587\,;$$

$$\alpha = P(X > 20 \,|\, 19.8 < X \le 20.2) = \frac{P(X > 20, 19.8 < X \le 20.2)}{P(19.8 \le X \le 20.2)} = \frac{P(20 < X \le 20.2)}{P(19.8 < X \le 20.2)} =$$

$$= \frac{\Phi_{20,0.2}(20.2) - \Phi_{20,0.2}(20)}{\Phi_{20,0.2}(20.2) - \Phi_{20,0.2}(19.8)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(0)}{\Phi(1) - \Phi(-1)} \;=\; \frac{\Phi(1) - \frac{1}{2}}{2\,\Phi(1) - 1} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

4. Si ha $T = X + Y$, con $I\!\!P(X) = \frac{1}{\lambda_1}$, $I\!\!P(Y) = \frac{1}{\lambda_2}$; quindi $I\!\!P(T) = I\!\!P(X) + I\!\!P(Y) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$. Inoltre $\lambda_a = \frac{2}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}$; pertanto

$$I\!\!P(T) = \frac{2}{\lambda_a} \;>\; \tau \;\Longleftrightarrow\; \lambda_a \;<\; \frac{2}{\tau}\,.$$