Probabilità e Statistica I (14/6/2008)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Un dispositivo d è stato prodotto da una macchina M_1 (ipotesi H) con probabilità α, oppure M_2 (ipotesi H^c) con probabilità $1-\alpha$. Il dispositivo viene utilizzato ripetutamente ed ogni volta è soggetto a guastarsi casualmente con probabilità 0.02 (risp., 0.01) se è stato prodotto da M_1 (risp., M_2). Indicando con X il numero aleatorio di utilizzazioni del dispositivo d fino al primo guasto e supposto vero l'evento $E = (X > 10)$, calcolare i valori di α tali che $P(H \mid E) > \frac{3}{4}$; (*si noti che* $(\frac{98}{99})^{10} \simeq 0.9035$).

   $\alpha \in$

2. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con distribuzione normale di parametri $m_X = -1$, $\sigma_X = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $m_Y = \frac{1}{2}$, $\sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{6}}$, sia $Z = X + 2Y$. Determinare: (i) la previsione e la varianza di Z; (ii) la distribuzione di probabilità di Z; (iii) la probabilità condizionata $p = P(Z \leq 1 \mid Z > -1)$. (*Nota: ricordiamo che facendo la convoluzione di due distribuzioni normali si ottiene una distribuzione normale*)

   (i) (ii) $(iii)\, p =$

3. Uno studente risponde a caso ad un test che consiste di 5 domande a risposta multipla con quattro risposte possibili per ogni domanda, di cui una sola esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente ad almeno 3 domande. Sia X il numero aleatorio di *risposte esatte* date dallo studente ed S l'evento *"lo studente supera il test"*. Calcolare: (i) la previsione di X; (ii) la probabilità condizionata $p = P(S \mid X > 1)$. (*Suggerimento: utilizzare gli eventi* $D_k =$ "la risposta alla k-ma domanda è esatta", $k = 1, \ldots, 5$)

   (i) $(ii)\, p =$

4. Una barra di lunghezza $20\,cm$ viene misurata n volte con uno stesso strumento di misura, il quale ogni volta genera un errore di misura con distribuzione normale standard. Siano $X_1, \ldots, X_n$ i valori a priori aleatori delle misure ottenute; inoltre, si assuma che gli errori di misura $Z_1, \ldots, Z_n$ siano stocasticamente indipendenti. Calcolare la varianza della media aritmetica $\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ e la probabilità p dell'evento $(20 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq 20 + \frac{2}{\sqrt{n}})$.

   $Var(\overline{X}) =$ $p =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 14/6/2008.

1. Il numero aleatorio X condizionatamente ad H (risp., H^c) ha una distribuzione geometrica di parametro $p = 0.02$ (risp., $p = 0.01$) e, osservando che $P(X > n) = q^n$, segue
$$P(E\,|\,H) = P(X > 10\,|\,H) = 0.98^{10}\,, \quad P(E\,|\,H^c) = P(X > 10\,|\,H^c) = 0.99^{10}\,.$$
Allora
$$P(H\,|\,E) = \frac{P(E\,|\,H)P(H)}{P(E\,|\,H)P(H) + P(E\,|\,H^c)P(H^c)} = \frac{0.98^{10}\alpha}{0.98^{10}\alpha + 0.99^{10}(1-\alpha)} = \frac{98^{10}\alpha}{98^{10}\alpha + 99^{10}(1-\alpha)}\,.$$
Quindi
$$P(H\,|\,E) > \frac{3}{4} \iff \alpha > \frac{3 \times 99^{10}}{3 \times 99^{10} + 98^{10}} = \frac{3}{3 + (\frac{98}{99})^{10}} \simeq \frac{3}{3 + 0.9035} \simeq 0.7685\,.$$

2. Z è la somma dei n.a. X e $2Y$ che sono indipendenti e con distribuzione normale; pertanto, facendo la convoluzione delle densità di X e di $2Y$, si ottiene una distribuzione normale di parametri
$$m_Z = I\!P(Z) = m_X + 2m_Y = 0\,, \quad \sigma_Z = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{Var(X) + 4Var(Y)} = 1\,.$$
Quindi, $Z \sim N_{0,1}$; inoltre, osservando che $\Phi(1) \simeq 0.8413$, segue
$$p = P(Z \leq 1\,|\,Z > -1) = \frac{P(-1 < Z \leq 1)}{P(Z > -1)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{1 - \Phi(-1)} = \frac{2\Phi(1) - 1}{\Phi(1)} \simeq 0.8114.$$

3. Si ha $X = \sum_{k=1}^{5} |D_k| \sim B(5, 0.25)$. Pertanto $I\!P(X) = 5 \cdot 0.25 = 1.25$. Inoltre
$$p = P(S\,|\,X > 1) = P(X \geq 3\,|\,X > 1) = \frac{P(X \geq 3, X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X \geq 3)}{1 - P(X \leq 1)} =$$
$$= \frac{1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)}{1 - P(X=0) - P(X=1)} = \cdots = \frac{53}{188} \simeq 0.282\,.$$

4. Si ha $X_i = Z_i + 20 \sim N_{20,1}$; inoltre, per $i \neq j$, risulta $Cov(X_i, X_j) = Cov(Z_i, Z_j) = 0$. Allora
$$I\!P(\overline{X}) = I\!P\left(\frac{\sum_i X_i}{n}\right) = \frac{\sum_i I\!P(X_i)}{n} = 20\,,$$
$$Var(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}Var(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}(\sum_i Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)) = \frac{1}{n}\,;$$
pertanto $\overline{X} \sim N_{20,\frac{1}{\sqrt{n}}}$. Quindi
$$p = P\left(20 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq 20 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \Phi_{20,\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(20 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - \Phi_{20,\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(20 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0.9544\,.$$