Nome e Cognome : ____________________________ *Num. Matr. :* ______________

Probabilità e Statistica I (7/2/2009)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

1. Sia X un numero aleatorio con distribuzione binomiale, di parametri $n = 3, p = \frac{1}{5}$. Determinare: (a) il codominio C_Y del n.a. $Y = \frac{1}{2}(1-X)^2$; (b) la distribuzione di probabilità $P = \{p_i\,,\, y_i \in C_Y\}$, dove $p_i = P(Y = y_i)$; (c) la previsione μ di Y.

   $C_Y =$ $\qquad\qquad$ $P =$ $\qquad\qquad$ $\mu =$

2. Siano dati due numeri aleatori X, con distribuzione normale standard, e Y, con distribuzione normale di parametri $m = \sigma = 1$. La densità congiunta è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+(y-1)^2}{2}}$, per ogni (x, y). Calcolare la probabilità p dell'evento $(-1 \leq X \leq 2\,,\; -1 \leq Y \leq 2)$.
   (*Nota:* $\Phi(1) \simeq 0,8413$; $\Phi(2) \simeq 0,9772$)

   $p =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = 0$, per $x < 0$; $f(x) = ax$, per $x \in [0, 1]$; $f(x) = 1/x^3$, per $x > 1$; calcolare la costante a. Inoltre, indicando con m la previsione di X, stabilire se vale $P(X > m) < P(X \leq m)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $P(X > m) < P(X \leq m)$?

4. Tizio e Caio effettuano 2 lanci ciascuno con un dado giudicato non truccato. Definiti gli eventi $A =$ *"Tizio ottiene sempre risultato pari, oppure sempre dispari "*, $B =$ *"Caio ottiene sempre un risultato minore di 3, oppure sempre maggiore o uguale a 3"*, $C =$ *"si verifica uno e uno solo degli eventi A, B"*, calcolare la differenza $\delta = P(B|C) - P(A|C)$.

   $\delta =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 7/2/2009.

1. Si ha $X \in \{0,1,2,3\}$; quindi $Y = \frac{1}{2}(1-X)^2 \in C_Y = \{y_1, y_2, y_3\} = \{0, \frac{1}{2}, 2\}$, con

$$p_1 = P(Y=0) = P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}\,;$$

$$p_3 = P(Y=2) = P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}\,; \qquad p_2 = 1 - p_1 - p_3 = \frac{76}{125}\,.$$

$$\mu = \mathbb{P}(Y) = \sum_i y_i p_i = 0 \cdot \frac{48}{125} + \frac{1}{2}\cdot\frac{76}{125} + 2\cdot\frac{1}{125} = \frac{8}{25} = 0,32\,.$$

2. Si ha

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,,\quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\,,\quad f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,,\ \forall\,(x,y)\,;$$

pertanto X e Y sono stocasticamente indipendenti. Allora, osservando che

$$P(-1 \le X \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1) \simeq 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185\,,$$

$$P(-1 \le Y \le 2) = \Phi_{1,1}(2) - \Phi_{1,1}(-1) = \Phi(2-1) - \Phi(-1-1) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - 1 + \Phi(2) \simeq 0,8185\,,$$

segue

$$P(-1 \le X \le 2\,,\ -1 \le Y \le 2) = P(-1 \le X \le 2)P(-1 \le Y \le 2) \simeq 0,8185^2 \simeq 0.6699\,.$$

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ovvero

$$\int_0^1 ax\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx = \left[a\,\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} = 1\,,$$

pertanto: $a = 1$. Allora

$$m = \mathbb{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\,;$$

quindi

$$P(X > m) = P(X > \frac{4}{3}) = \int_{\frac{4}{3}}^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\frac{4}{3}}^{+\infty} = \frac{9}{32}\,,$$

con $P(X \le m) = 1 - P(X > m) = \frac{23}{32}$. Pertanto: $P(X > m) < P(X \le m)$.

4. Si ha: $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,,\ \ P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$; inoltre, A e B sono stocasticamente indipendenti, con

$$P(C) = P(AB^c \vee A^cB) = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{2}\,;$$

allora, osservando che $AC = A \wedge (AB^c \vee A^cB) = AB^c\,,\ \ BC = B \wedge (AB^c \vee A^cB) = A^cB$, segue

$$P(A|C) = \frac{P(AB^c)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}\,; \qquad P(B|C) = \frac{P(A^cB)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{9}\,.$$

Pertanto: $\delta = \frac{1}{9}$.