*Nome e Cognome :* ______________________ *Num. Matr. :* ______________

**Probabilità e Statistica I** (13/11/2009)

*(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)*

1. Un sistema è composto da 3 dispositivi $d_1, d_2, d_3$, con $d_1, d_2$ in parallelo fra loro, mentre $d_3$ è in serie con il modulo formato da $d_1, d_2$. Definiti gli eventi $E_i =$ *"il dispositivo $d_i$ è non difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, si assuma che tali eventi siano indipendenti ed equiprobabili, con $P(E_i) = p$. Calcolare: (i) la probabilità $\alpha$ che il sistema funzioni; (ii) assumendo $p \geq \frac{2}{3}$, verificare se $\alpha$ è maggiore di $\frac{1}{2}$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\alpha > \dfrac{1}{2}$ ?

2. Un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ ha una distribuzione uniforme sul triangolo $T$ di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la previsione $\mu$ e lo scarto quadratico medio $\sigma$ di $Z$.

   $\mu =$ $\qquad\qquad$ $\sigma =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti.

   *Indip. stocastica* ?

4. Un lotto $L_1$ contiene 3 pezzi buoni e 1 difettoso, mentre un lotto $L_2$ contiene 1 pezzo buono e 3 difettosi. Da uno dei due lotti si estraggono a caso 2 pezzi che vengono esaminati. Sia $H$ l'evento *"i 2 pezzi sono estratti dal lotto $L_1$"* ed $E$ l'evento *"i 2 pezzi esaminati risultano uno buono e uno difettoso"*. Posto $P(H) = p$, stabilire quali delle seguenti affermazioni sono esatte: (i) $P(E) = P(E|H) = P(E|H^c)$; (ii) per ogni $p \in [0, 1]$, si ha $P(H|E) = p$.

   $P(E) = P(E|H) = P(E|H^c)$ ? $\qquad\qquad$ $P(H|E) = p$ ?

**Probabilità e Statistica I** (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

*Soluzioni della prova scritta del 13/11/2009.*

1. Si ha
$$\alpha = P[(E_1 \vee E_2) \wedge E_3] = P(E_1E_3 \vee E_2E_3) = P(E_1E_3) + P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) =$$
$$= P(E_1)P(E_3) + P(E_2)P(E_3) - P(E_1)P(E_2)P(E_3) = 2p^2 - p^3 = f(p),$$
con $f(0) = 0, f(1) = 1$. Inoltre $f'(p) = 4p - 3p^2 > 0$, per ogni $p \in (0,1]$, con
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{16}{27} > \frac{1}{2}\,.$$
Pertanto, nell'intervallo $[\frac{2}{3}, 1]$ la funzione $f(p)$ è crescente e assume valori maggiori di $\frac{1}{2}$.

2. Si ha $f(x,y) = \frac{1}{2}$ per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre $Z \in [0,2]$ e, per ogni $z \in (0,2)$, l'evento $(Z \leq z)$ è vero se e solo se $(X,Y) \in T_z$ dove $T_z$ è il triangolo di vertici i punti $(0,0), (z,0), (0,z)$, di area $\frac{z^2}{2}$. Allora
$$P(Z \leq z) = G(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} \frac{1}{2}\, dy = \int\int_{T_z} \frac{1}{2}\, dxdy = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{4}\,.$$
Pertanto, per ogni $z \in [0,2]$, risulta
$$G'(z) = g(z) = \frac{z}{2}\,,$$
con $g(z) = 0$ altrove. Allora
$$\mu = \mathbb{P}(Z) = \int_0^2 zg(z)dz = \cdots = \frac{4}{3}; \quad \mathbb{P}(Z^2) = \int_0^2 z^2 g(z)dz = \cdots = 2\,;$$
pertanto
$$\sigma = \sqrt{\mathbb{P}(Z^2) - [\mathbb{P}(Z)]^2} = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

3. Osservando che la retta passante per i punti $(2,0), (0,2)$ ha equazione: $x + y = 2$, segue
$$f_1(x) = \int_0^{2-x} \frac{1}{2} dy = 1 - \frac{x}{2}\,, \quad 0 \leq x \leq 2\,; \quad f_2(y) = \int_0^{2-y} \frac{1}{2} dx = 1 - \frac{y}{2}\,, \quad 0 \leq y \leq 2\,.$$
Allora $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$; pertanto $X$ ed $Y$ non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha
$$P(E|H) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}; \quad P(E|H^c) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,;$$
pertanto
$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = \frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot (1-p) = \frac{1}{2} = P(E|H) = P(E|H^c)\,.$$
Inoltre
$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot p}{\frac{1}{2}} = p\,, \quad \forall p \in [0,1]\,.$$