Probabilità e Statistica (16/01/2010)

(Ing. Civile - Trasporti, Roma; esame da 4 crediti: esercizi 1-4)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Un lotto contenente 6 pezzi buoni e 1 difettoso viene diviso a caso in due lotti: A, contenente 3 pezzi, e B, contenente 4 pezzi; sia H l'evento *"il pezzo difettoso sta nel lotto A"*. Da ognuno dei lotti A e B si estrae a caso un pezzo che viene esaminato. Definiti gli eventi $E_1 =$ *"il pezzo estratto da A è buono"*, $E_2 =$ *"il pezzo estratto da B è buono"*, calcolare la probabilità p che il pezzo difettoso stia in A, supposto che gli eventi E_1, E_2 siano entrambi veri.

   $p =$

2. I tempi aleatori X e Y impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada hanno una densità congiunta $f(x, y) = a(x+y)$, per $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare il valore di a e la probabilità p dell'evento condizionato $(X \geq Y \mid X \leq 1)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Un esperimento aleatorio consiste in 3 lanci di una moneta; sia E_i l'evento *"nell'i-mo lancio si ottiene Testa"*, $i = 1, 2, 3$. Assumendo E_1, E_2, E_3 indipendenti ed equiprobabili, di probabilità $p > 0$, e posto $A = E_1 \vee E_2$, $B = E_2 \vee E_3$, calcolare il rapporto r tra le probabilità degli eventi condizionati $A|B$ e $B|A$.

   $r =$

4. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con $X \sim H(4, 3, \frac{1}{2})$, $Y \sim H(4, 3, \frac{1}{2})$, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X = 1 \mid X + Y = 3)$.

   $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $\varphi_Z(t) =$

6. La funzione di rischio di un numero aleatorio continuo X non negativo è $h(x) = 4x$, per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove. Determinare la previsione e la varianza di X.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad$ $Var(X) =$

7. La densità di probabilità iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = 4\theta e^{-2\theta}$, per $\theta > 0$, con $\beta(\theta) = 0$; inoltre, per ogni fissato $\theta > 0$, le componenti di un campione casuale $X = (X_1, X_2, X_3)$ sono stocasticamente indipendenti subordinatamente a θ e con distribuzione esponenziale di parametro θ; ovvero: $X_i|\theta \sim f(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, $x_i \geq 0$. Determinare la previsione di $\Theta|\mathbf{x}$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e con $x_1 + x_2 + x_3 = t$.

   $\mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 16/01/2010.

1. Si ha $P(H) = \frac{\binom{1}{1}\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{7}$; $P(H^c) = \frac{4}{7}$; inoltre

$$P(E_1E_2 \,|\, H) = P(E_1 \,|\, H)P(E_2 \,|\, H) = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3};\ P(E_1E_2 \,|\, H^c) = P(E_1 \,|\, H^c)P(E_2 \,|\, H^c) = 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4};$$

quindi

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2 \,|\, H)P(H) + P(E_1E_2 \,|\, H^c)P(H^c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7} = \frac{5}{7}\,;$$

pertanto

$$p = P(H \,|\, E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2 \,|\, H)P(H)}{P(E_1E_2)} = P(H) = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{5}\,.$$

2. Si ha

$$\int_0^2 dx \int_0^2 a(x+y)\,dy = a\int_0^2 (2x+2)\,dx = 8a = 1\,;$$

pertanto: $a = \frac{1}{8}$. Inoltre $p = P(X \geq Y \,|\, X \leq 1) = \frac{P(X \geq Y, X \leq 1)}{P(X \leq 1)}$, con

$$P(X \geq Y, X \leq 1) = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{8}(x+y)\,dy = \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{1}{16}\,,$$

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 dx \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)\,dy = \frac{1}{8}\int_0^1 (2x+2)\,dx = \frac{3}{8}\,;$$

pertanto: $p = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6}$.

3. Osservando che $AB = (E_1 \vee E_2) \wedge (E_2 \vee E_3) = (E_1E_3 \vee E_2)$, segue

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(E_1E_3 \vee E_2)}{P(E_2 \vee E_3)} = \cdots = \frac{p^2+p-p^3}{p+p-p^2} = \frac{1+p-p^2}{2-p}\,;$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(E_1E_3 \vee E_2)}{P(E_1 \vee E_2)} = \cdots = \frac{p^2+p-p^3}{p+p-p^2} = \frac{1+p-p^2}{2-p} = P(A|B)\,;$$

pertanto: $r = 1$.
(*In modo più sintetico:* $P(A) = 2p - p^2 = P(B)$; $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B|A)$; *pertanto* $r = 1$)

4. Si ha $\alpha = \frac{P(X=1, X+Y=3)}{P(X+Y=3)}$, con

$$P(X=1, X+Y=3) = P(X=1, Y=2) = P(X=1)P(Y=2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}}\cdot\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(X+Y=3) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) =$$
$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}}\cdot\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}\cdot\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto: $\alpha = \frac{1}{2}$.

5. Dall'esercizio precedente, si ha

$$P(X=1) = P(Y=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2}\,, \; P(X=2) = P(Y=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto, ricordando che X e Y sono stocasticamente indipendenti, segue

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \frac{e^{it} + e^{2it}}{2}\,; \;\; \varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = \frac{(e^{it} + e^{2it})^2}{4}\,.$$

6. Si ha

$$S(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt} = e^{-2x^2}\,, \quad x \geq 0\,;$$

quindi, per $x \geq 0$ si ha $f(x) = h(x)S(x) = 4x\, e^{-2x^2}$, con $f(x) = 0$ altrove. Allora

$$I\!P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} 4x^2 e^{-2x^2} dx = [-x e^{-2x^2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{4}}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} N_{0,\frac{1}{2}}(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Inoltre

$$I\!P(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} 4x^3 e^{-2x^2} dx =$$

$$= [-x^2 e^{-2x^2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-2x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto

$$Var(X) = I\!P(X^2) - [I\!P(X)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{4-\pi}{8}\,.$$

7. La densità di probabilità finale è $\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\mathbf{x}|\theta)$, con

$$\alpha(\mathbf{x}|\theta) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)f(x_3|\theta) = \theta^3 e^{-t\theta}\,, \quad \theta > 0\,;$$

pertanto

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) = 4k(\mathbf{x})\theta^4 e^{-(t+2)\theta} = G_{5,t+2}(\theta)\,, \quad \theta > 0\,;$$

ovvero, la distribuzione finale di Θ è una Gamma di parametri $c = 5, \lambda = t+2$.
Pertanto: $\mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{5}{t+2}$.