Probabilità e Statistica (13/02/2010)

(Ing. Civile - Trasporti, Roma; esame da 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Siano dati 2 lotti: L_1 contenente 4 pezzi buoni e 2 difettosi; L_2 contenente 2 pezzi buoni e 4 difettosi. Scelto uno dei due lotti, L_1 (con probabilità p) oppure L_2 (con probabilità $1-p$), da esso si effettuano un numero aleatorio X di estrazioni con restituzione fino ad ottenere per la prima volta un pezzo buono. Definiti gli eventi $E = (X = 2)$, $H =$ *"le estrazioni sono state effettuate da L_1"*, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $H|E$.

   $\gamma =$

2. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo A e B, con B che entra in funzione nell'istante in cui si guasta A. I tempi aleatori X e Y di durata fino al guasto di A e B hanno una densità congiunta $f(x,y) = 4e^{-2x-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Definiti gli eventi $H = (0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1)$, $E = (X + Y \leq 1)$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $E|H$.

   $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la previsione m e lo scarto standard σ del tempo aleatorio T di durata fino al guasto di S.

   $m =$ $\qquad\qquad$ $\sigma =$

4. Da un'urna contenente 4 palline bianche e 2 nere si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(E_2 \vee E_3)|(E_1 \vee E_3)$.

   $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

   $\varphi_X(t) =$

6. Con riferimento all'esercizio 3, calcolare la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio $Z = 2T$, per ogni $z > 0$.

   $h_Z(z) =$

7. La densità di probabilità iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{8}}$; inoltre, per ogni fissato θ, le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_6)$ sono stocasticamente indipendenti subordinatamente a θ e con distribuzione normale di parametri $m = \theta, \sigma = 1$; ovvero: $X_i|\theta \sim f(x_i|\theta) = N_{\theta,1}(x_i)$. Calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(-\frac{4}{5} \leq \Theta \leq \frac{4}{5} \,|\, \mathbf{x})$, assumendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_6) = (-3, -2, -1, 1, 2, 3)$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 13/02/2010.

1. Si ha $P(H) = p\,,\ P(H^c) = 1 - p$; inoltre

$$P(E|H) = P(X = 2|H) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}\,,\ P(E|H^c) = P(X = 2|H^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}\,;$$

quindi

$$P(E) = P(X = 2) = P(X = 2|H)P(H) + P(X = 2|H^c)P(H^c) = \frac{2}{9}\,p + \frac{2}{9}(1 - p) = \frac{2}{9}\,;$$

allora: $\gamma = P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(H)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = P(H) = p.$

2. Posto $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$ e osservando che $\int_0^{1-x} 2e^{-2y}dy = 1-e^{-2(1-x)}$, $\int_0^1 2e^{-2x}dx = 1 - e^{-2}$, si ha $P(E|H) = \frac{P(EH)}{P(H)} = \frac{P(E)}{P(H)}$, con

$$P(E) = \int\int_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 4e^{-2x-2y}dy = \int_0^1 2e^{-2x}dx \int_0^{1-x} 2e^{-2y}dy =$$

$$= \int_0^1 2e^{-2x}(1 - e^{-2(1-x)})dx = \int_0^1 2e^{-2x}dx - \int_0^1 2e^{-2}dx = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}\,,$$

$$P(H) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 4e^{-2x-2y}dxdy = \int_0^1 2e^{-2x}dx \int_0^1 2e^{-2y}dy = (1-e^{-2})^2\,;$$

pertanto: $p = P(E|H) = \frac{1-3e^{-2}}{(1-e^{-2})^2} = \frac{e^2-3}{e^2+e^{-2}-2}$.

3. Si ha $T = X + Y$ e per ogni fissato $t > 0$, indicando con G la funzione di ripartizione di T, risulta

$$G(t) = P(T \le t) = P(X + Y \le t) = \int_0^t dx \int_0^{t-x} 4e^{-2x-2y}dy =$$

$$= \int_0^t 2e^{-2x}[-e^{-2y}]_0^{t-x}dx = \int_0^t (2e^{-2x} - 2e^{-2t})dx = \cdots = 1 - e^{-2t} - 2te^{-2t}\,;$$

allora: $G'(t) = g(t) = \cdots = 4te^{-2t}\,,\ t \ge 0$, con $g(t) = 0$ altrove (distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = 2$). Pertanto

$$m = \int_0^{+\infty} t\,g(t)dt = \int_0^{+\infty} 4t^2e^{-2t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \frac{1}{2}\,\Gamma(3) = 1 = \frac{c}{\lambda}\,,$$

$$\mathbb{P}(T^2) = \int_0^{+\infty} t^2\,g(t)dt = \int_0^{+\infty} 4t^3e^{-2t}dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx = \frac{1}{4}\,\Gamma(4) = \frac{3}{2}\,,$$

$$\sigma^2 = \mathbb{P}(T^2) - [\mathbb{P}(T)]^2 = \frac{1}{2} = \frac{c}{\lambda^2}\,,\ \ \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

(*Nota: in alternativa, si possono calcolare prima* $\mathbb{P}(X), \mathbb{P}(Y), \mathbb{P}(X^2), \mathbb{P}(Y^2), \mathbb{P}(XY)$, *e poi i valori* $m = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)\,,\ \sigma = \sqrt{Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)}$)

4. Si ha $P(E_i) = \frac{2}{3}\,,\ i = 1, 2, 3$; inoltre

$$P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = P(E_1E_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}\,;\ \ P(E_1E_2E_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}\,;$$

inoltre

$$(E_2 \vee E_3) \wedge (E_1 \vee E_3) = E_1E_2 \vee E_2E_3 \vee E_1E_3 \vee E_3 = E_1E_2 \vee E_3\,;$$

pertanto

$$\alpha = P[(E_2 \vee E_3)|(E_1 \vee E_3)] = \frac{P[(E_2 \vee E_3) \wedge (E_1 \vee E_3)]}{P(E_1 \vee E_3)} = \frac{P(E_1E_2 \vee E_3)]}{P(E_1 \vee E_3)} =$$

$$= \frac{P(E_1E_2) + P(E_3) - P(E_1E_2E_3)}{P(E_1) + P(E_3) - P(E_1E_3)} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5}} = \frac{13}{14}\,.$$

5. Si ha $X \sim H(6, 3, \frac{2}{3})$, con $X \in \{1, 2, 3\}$ e con

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,,\ \ P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}\,,\ \ P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,;$$

pertanto, posto $P(X = h) = p_h$, risulta

$$\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_1^3 p_h e^{ith} = \frac{1}{5}(e^{it} + 3e^{2it} + e^{3it})\,.$$

6. Indicando con F_Z la funzione di ripartizione di Z, per ogni $z > 0$ si ha

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(T \leq \frac{z}{2}\right) = G\left(\frac{z}{2}\right) = 1 - e^{-z} - ze^{-z}\,;$$

quindi

$$F'_Z(z) = f_Z(z) = \cdots = ze^{-z}\,,\ z \geq 0\,,$$

con $f_Z(z) = 0$ altrove (distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = 1$). Allora

$$S_Z(z) = P(Z > z) = 1 - F_Z(z) = 1 - (1 - e^{-z} - ze^{-z}) = e^{-z} + ze^{-z}\,,\ \ z \geq 0\,;$$

pertanto

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{ze^{-z}}{e^{-z} + ze^{-z}} = \frac{z}{1 + z}\,,\ \ z \geq 0\,.$$

7. Osservando che $\Theta \sim N_{m_0,\sigma_0}$, con $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 2$, e che $\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_6}{6} = 0$, segue

$$\beta(\theta\,|\,\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\mathbf{x}\,|\,\theta) = k(\mathbf{x})N_{0,2}(\theta)N_{\theta,1}(x_1)\cdots N_{\theta,1}(x_6) = \cdots = N_{m_6,\sigma_6}(\theta)\,,$$

con

$$m_6 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\,m_0 + \frac{6}{\sigma^2}\,\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{6}{\sigma^2}} = 0\,,\ \ \ \frac{1}{\sigma_6^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{6}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4}\,;$$

quindi: $\Theta\,|\,\mathbf{x} \sim N_{0,\frac{2}{5}}$. Allora

$$p = P\left(-\frac{4}{5} \leq \Theta \leq \frac{4}{5}\ \mid\ \mathbf{x}\right) = \Phi_{0,\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{5}\right) - \Phi_{0,\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \ \simeq 2\ \times 0.9772 - 1 = 0.9544\,.$$