Probabilità e Statistica (12/06/2010)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Siano dati 2 lotti L_1 ed L_2, contenenti entrambi 3 pezzi buoni e 1 difettoso. Dal lotto L_2 viene tolto a caso un pezzo; quindi, si prende a caso un pezzo dal lotto L_1 e viene inserito in L_2. Successivamente, da L_2 si prelevano a caso 2 pezzi. Definiti gli eventi $K =$ *"il pezzo tolto da L_2 è buono"*, $H =$ *"il pezzo estratto da L_1 e inserito in L_2 è buono"*, $E =$ *"i 2 pezzi prelevati da L_2 sono entrambi buoni"*, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $HK \mid E$.

   $\gamma =$

2. I tempi (in un'opportuna unità di misura) impiegati da un veicolo per percorrere due tratti di strada sono due numeri aleatori X, Y, con distribuzione di probabilità congiunta uniforme sull'insieme $\mathcal{D} = \{(x, y) : 3 \le x \le 5\,,\ 1 \le y \le 3\}$. Calcolare la previsione m_Z e lo scarto standard σ_Z del tempo di percorrenza totale $Z = X + Y$.

   $m_Z =$ $\sigma_Z =$

3. Siano dati due numeri aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale di parametri $m = 0, \sigma = 2$. Considerati gli eventi $(-4 \le X \le 0)$ e $(0 \le Y \le 4)$, calcolare la probabilità p dell'evento intersezione. (*nota: ricordiamo che* $\Phi(2) \simeq 0.9772$)

   $p =$

4. Da un'urna contenente 4 palline bianche e 4 nere si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare le probabilità $\gamma = P(E_2 E_3^c)$ e $\delta = P(E_1 \mid E_2^c E_3)$.

   $\gamma =$ $\delta =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

   $\varphi_X(t) =$

6. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = 9xe^{-3x}$ per $x \ge 0$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di rischio $h(x)$ di X, per ogni $x > 0$.

   $h(x) =$

7. La densità di probabilità iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = 9\theta e^{-3\theta}$ per $\theta \ge 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove; inoltre, per ogni fissato θ, le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_6)$ sono stocasticamente indipendenti subordinatamente a θ e con distribuzione esponenziale di parametro θ; ovvero: $X_i|\theta \sim f(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, per $x_i \ge 0$, con $f(x_i|\theta) = 0$ altrove. Calcolare la previsione di $\Theta \mid \mathbf{x}$, assumendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_6) = (4, 5, 6, 3, 2, 1)$.

   $\mathbb{P}(\Theta \mid \mathbf{x}) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 12/06/2010.

1. Si ha

$$P(H) = P(K) = \frac{3}{4}\,,\ P(HK) = P(H)P(K) = \frac{9}{16}\,,\ P(HK^c) = P(H)P(K^c) = \frac{3}{16}\,,$$

$$P(H^cK) = P(H^c)P(K) = \frac{3}{16}\,,\ P(H^cK^c) = P(H^c)P(K^c) = \frac{1}{16}\,;$$

$$P(E\,|\,HK) = P(E\,|\,H^cK^c) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,,\ P(E\,|\,HK^c) = 1\,,\ P(E\,|\,H^cK) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}\,.$$

Quindi

$$P(E) = P(HK)P(E\,|\,HK)+P(HK^c)P(E\,|\,HK^c)+P(H^cK)P(E\,|\,H^cK)+P(H^cK^c)P(E\,|\,H^cK^c) =$$

$$= \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\cdot 1 + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{32}\,;$$

$$\gamma = P(HK\,|\,E) = \frac{P(E\,|\,HK)P(HK)}{P(E)} = \frac{\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{17}{32}} = \frac{9}{17}\,.$$

2. L'area del quadrato $\mathcal{D}$ è 4; pertanto, si ha $f(x,y) = \frac{1}{4}$, per $(x,y) \in \mathcal{D}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Si ha

$$f_1(x) = \int_1^3 \frac{1}{4}dy = \frac{1}{2}\,,\ x \in [3,5]\,,\ f_1(x) = 0\,,\ x \notin [3,5]\,;$$

$$f_2(y) = \int_3^5 \frac{1}{4}dx = \frac{1}{2}\,,\ y \in [1,3]\,,\ f_2(y) = 0\,,\ y \notin [1,3]\,.$$

Quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione uniforme nei rispettivi intervalli; allora

$$\mathbb{P}(X) = \frac{3+5}{2} = 4\,,\ \mathbb{P}(Y) = \frac{1+3}{2} = 2\,,\ \sigma_X^2 = \frac{(5-3)^2}{12} = \frac{1}{3} = \frac{(3-1)^2}{12} = \sigma_Y^2\,.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 6\,;\quad \sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

3. Si ha

$$p = P(-4 \leq X \leq 0,\, 0 \leq Y \leq 4) = P(-4 \leq X \leq 0)P(0 \leq Y \leq 4)\,,$$

con

$$P(-4 \leq X \leq 0) = \Phi_{0,2}(0) - \Phi_{0,2}(-4) = \Phi(0) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(0) - (1 - \Phi(2)) \simeq 0.5 - 1 + 0.9772 = 0.4772\,;$$

$$P(0 \leq Y \leq 4) = \Phi_{0,2}(4) - \Phi_{0,2}(0) = \Phi(2) - \Phi(0) \simeq 0.9772 - 0.5 = 0.4772\,;$$

quindi: $p \simeq 0.4772^2 \simeq 0.2277$.

4. Si ha

$$\gamma = P(E_2 E_3^c) = P(E_1 E_2 E_3^c) + P(E_1^c E_2 E_3^c) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{7};$$

$$\delta = P(E_1 \,|\, E_2^c E_3) = \frac{P(E_1 E_2^c E_3)}{P(E_2^c E_3)} = \frac{P(E_1 E_2^c E_3)}{P(E_1 E_2^c E_3) + P(E_1^c E_2^c E_3)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}.$$

5. Si ha: $X \sim H(8, 3, \frac{1}{2})$, con $X \in \{0, 1, 2, 3\}$, e con

$$P(X = h) = \frac{\binom{4}{h}\binom{4}{3-h}}{\binom{8}{3}}, \; h = 0, 1, 2, 3;$$

quindi

$$P(X=0) = p_0 = \frac{1}{14}, \;\; P(X=1) = p_1 = \frac{6}{14}, \;\; P(X=2) = p_2 = \frac{6}{14}, \;\; P(X=3) = p_3 = \frac{1}{14}.$$

Pertanto

$$\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{h=0}^{3} p_h e^{ith} = \frac{1 + 6e^{it} + 6e^{2it} + e^{3it}}{14}.$$

6. Si ha $h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$, con

$$S(x) = \int_x^{+\infty} 9te^{-3t}dt = [-3t\, e^{-3t}]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} 3e^{-3t}dt = 3xe^{-3x} + e^{-3x} = e^{-3x}(3x+1).$$

Pertanto, per ogni $x > 0$, si ha: $h(x) = \frac{9xe^{-3x}}{e^{-3x}(3x+1)} = \frac{9x}{3x+1}$.

7. Per la funzione di verosimiglianza si ha

$$\alpha(\theta \,|\, \mathbf{x}) = f(x_1|\theta)\cdots f(x_6|\theta) = \theta e^{-4\theta}\cdots\theta e^{-\theta} = \theta^6 e^{-21\,\theta}, \; \theta \geq 0,$$

con $\alpha(\theta \,|\, \mathbf{x}) = 0$ altrove. Allora, per la densità finale, si ha

$$\beta(\theta \,|\, \mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\theta \,|\, \mathbf{x}) = \cdots = k_1(\mathbf{x})\theta^7 e^{-24\,\theta}, \; \theta \geq 0,$$

con $\beta(\theta \,|\, \mathbf{x}) = 0$ altrove. Pertanto, la distribuzione finale è una densità di tipo Gamma (come quella iniziale), di parametri $c = 8, \lambda = 24$ ($k_1(\mathbf{x}) = \frac{24^8}{7!}$); quindi $\mathbb{P}(\Theta \,|\, \mathbf{x}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{3}$. Infatti

$$\mathbb{P}(\Theta \,|\, \mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} \theta\, \frac{24^8}{7!}\, \theta^7 e^{-24\,\theta} d\theta = \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{24}\int_0^{+\infty} (24\theta)^8 e^{-24\,\theta} d(24\theta) =$$

$$= \frac{1}{24\cdot 7!}\int_0^{+\infty} x^8 e^{-x} dx = \frac{\Gamma(9)}{24\cdot 7!} = \frac{8!}{24\cdot 7!} = \frac{1}{3}.$$