Probabilità e Statistica (18/09/2010)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Tizio e Caio partecipano a un gioco in cui ci sono 9 buste chiuse, delle quali 2 sono abbinate alla vincita di una somma S. Il conduttore divide a caso le 9 buste in 2 gruppi L_1 ed L_2, con L_1 contenente 6 buste ed L_2 contenente 3 buste. Tizio estrae a caso una busta da L_1, mentre Caio estrae a caso una busta da L_2. Definiti gli eventi $H_r =$ "r delle 6 buste contenute in L_1 sono vincenti", $r = 0, 1, 2$, $A =$ "*la busta estratta da Tizio è vincente*", $B =$ "*la busta estratta da Caio è vincente*", verificare se $P(A) = P(B)$.

   $P(A) = P(B)$?

2. Due autotreni transitano in tempi successivi su un ponte pericolante che sopporta carichi fino a 2 tonnellate. I carichi aleatori X e Y (in tonnellate) dei 2 autotreni hanno una densità di probabilità congiunta $f(x,y) = \frac{4(3-x)(3-y)}{81}$, per $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Definiti gli eventi $A = (X > 2)$, $B = (Y > 2)$, $H = (X + Y \geq 3)$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(A \vee B) \,|\, H$.

   $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti e calcolare la covarianza della coppia $\left(2X + 2Y, \frac{X}{2} - \frac{Y}{2}\right)$.

   X, Y *indipendenti*? $\qquad$ $Cov\left(2X + 2Y, \frac{X}{2} - \frac{Y}{2}\right) =$

4. Siano dati 3 numeri aleatori X_1, X_2, X_3, stocasticamente indipendenti e con distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$. Posto $Y = X_1 + X_2 + X_3$, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ di Y; inoltre, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(Y = 3 \,|\, Y \leq 4)$.

   $m =$ $\qquad$ $\sigma =$ $\qquad$ $\alpha =$

5. Siano dati 4 numeri aleatori $X_1, \ldots, X_4$, indipendenti ed ugualmente distribuiti, con funzione caratteristica $\varphi(t) = e^{it-2t^2}$. Calcolare la previsione μ_Z e lo scarto quadratico medio σ_Z del numero aleatorio $Z = \frac{X_1 + \cdots + X_4}{4}$.

   $\mu_Z =$ $\qquad$ $\sigma_Z =$

6. Un sistema è formato da due dispositivi in parallelo d_1 e d_2, con d_2 che entra in funzione nell'istante di guasto di d_1. I tempi di durata dei due dispositivi sono due numeri aleatori X e Y indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$. Calcolare, per ogni $z > 0$, la funzione di rischio $h_Z(z)$ del tempo aleatorio $Z = X + Y$ di durata fino al guasto del sistema.

   $h_Z(z) =$

7. In un lotto, formato da 5 componenti, i pezzi sono 4 buoni e 1 difettoso (ipotesi H), oppure tutti buoni (ipotesi H^c). Dal lotto si prelevano a caso, senza restituzione, 3 componenti che vengono esaminati. Definiti gli eventi $E_i =$ "*l'i-mo pezzo esaminato è buono*", $i = 1, 2, 3$, stabilire se gli eventi E_1, E_2, E_3 sono scambiabili; inoltre, assumendo $P(H) = P(H^c)$, calcolare la probabilità condizionata $p = P(E_1 | E_2 E_3)$.

   E_1, E_2, E_3 *scambiabili* ? $\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 18/09/2010.

1. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{7}{6-r}}{\binom{9}{6}}$, $r = 0, 1, 2$; quindi: $P(H_0) = \frac{1}{12}$, $P(H_1) = \frac{6}{12}$, $P(H_2) = \frac{5}{12}$; inoltre: $P(A|H_0) = P(B|H_2) = 0$, $P(A|H_1) = \frac{1}{6}$, $P(B|H_1) = \frac{1}{3}$, $P(A|H_2) = \frac{2}{6}$, $P(B|H_0) = \frac{2}{3}$. Allora: $P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{9}$, $P(B) = P(B|H_0)P(H_0) + P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{9}$; pertanto: $P(A) = P(B)$.

2. Si ha: $A^c = (X \le 2)$, $B^c = (Y \le 2)$, $(A \vee B)^c = A^c B^c = (X \le 2, Y \le 2)$; inoltre $P[(A \vee B) \,|\, H] = 1 - P(A^c B^c \,|\, H) = 1 - \frac{P(A^c B^c H)}{P(H)}$, con

$$P(H) = \frac{4}{81}\int_0^3 dx \int_{3-x}^3 (3-x)(3-y)dy = \frac{4}{81}\int_0^3 (3-x)[3y - \frac{1}{2}y^2]_{3-x}^3 dx =$$

$$= \cdots = \frac{2}{81}\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx = \cdots = \frac{1}{6}\,,$$

$$P(A^c B^c H) = \frac{4}{81}\int_1^2 dx \int_{3-x}^2 (3-x)(3-y)dy = \frac{4}{81}\int_1^2 (3-x)[3y - \frac{1}{2}y^2]_{3-x}^2 dx =$$

$$= \cdots = \frac{2}{81}\int_1^2 (3x^2 - x^3 - 3 + x)dx = \cdots = \frac{7}{162}\,;$$

pertanto: $p = 1 - \frac{\frac{7}{162}}{\frac{1}{6}} = \frac{20}{27}$.

3. Si ha: $f_1(x) = \int_0^3 \frac{4(3-x)(3-y)}{81}dy = \frac{6-2x}{9}\int_0^3 \frac{6-2y}{9}dy = \cdots = \frac{6-2x}{9}$, $0 \le x \le 3$, con $f_1(x) = 0$ altrove; inoltre

$$f_2(y) = \int_0^3 \frac{(6-2x)(6-2y)}{81}dx = \frac{6-2y}{9}\int_0^3 \frac{6-2x}{9}dx = \cdots = \frac{6-2y}{9}\,, \quad 0 \le y \le 3\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, ovvero X e Y sono indipendenti, e quindi $Cov(X,Y) = 0$; inoltre, $f_1 = f_2$ e in particolare si ha $Var(X) = Var(Y)$. Allora, sfruttando le proprietà della covarianza, segue

$$Cov\left(2X + 2Y, \frac{X}{2} - \frac{Y}{2}\right) = Cov\left(2X, \frac{X}{2}\right) - Cov\left(2X, \frac{Y}{2}\right) + Cov\left(2Y, \frac{X}{2}\right) - Cov\left(2Y, \frac{Y}{2}\right) =$$

$$= Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) = Var(X) - Var(Y) = 0\,.$$

4. Si ha $\mathbb{P}(X_i) = \frac{1}{p} = 2$, $Var(X_i) = \frac{q}{p^2} = 2$, $i = 1, 2, 3$, quindi

$$m = \mathbb{P}(Y) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(X_i) = 6\,,\ \sigma = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 Var(X_i)} = \sqrt{6}\,;$$

inoltre, osservando che $P(X_i = h) = pq^{h-1} = \frac{1}{2^h}$, $h = 1, 2, \ldots$, posto $P(Y = k) = p_k$, segue: $p_3 = P(X_1 = 1,\, X_2 = 1,\, X_3 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;

$p_4 = P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$;
pertanto: $\alpha = P(Y = 3 \,|\, Y \leq 4) = \frac{P(Y=3, Y\leq 4)}{P(Y\leq 4)} = \frac{P(Y=3)}{P(Y\leq 4)} = \frac{p_3}{p_3+p_4} = \frac{2}{5}$.

5. Indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X_h, $h = 1, \ldots, 4$, si ha

$$\mu_Z = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_4}{4}\right) = \frac{\mathbb{P}(X_1) + \cdots + \mathbb{P}(X_4)}{4} = m\,;$$

inoltre, essendo $Cov(X_h, X_j) = 0$ per $h \neq j$, si ha

$$Var(Z) = \sigma_Z^2 = Var\left(\frac{X_1 + \cdots + X_4}{4}\right) = \left(\frac{Var(X_1) + \cdots + Var(X_4)}{16}\right) = \frac{\sigma^2}{4}\,.$$

Infine, ricordando la relazione $\mathbb{P}(X_h^k) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}$ e osservando che

$$\varphi'(t) = e^{it-2t^2}(i - 4t)\,, \quad \varphi''(t) = \cdots = e^{it-2t^2}(16t^2 - 8it - 5)\,,$$

e quindi: $\varphi'(0) = i = i\mathbb{P}(X_h) = im\,,\quad \varphi''(0) = -5 = i^2\mathbb{P}(X_h^2) = -(m^2 + \sigma^2)$, segue $m = 1\,,\ \sigma = 2$. Pertanto $\mu_Z = \sigma_Z = 1$.
(*Metodo alternativo: si può osservare che* $X_h \sim N_{1,2}$, *quindi...*)

6. Si ha $f(x, y) = 9e^{-3x-3y}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; allora, per ogni $z > 0$, si ha

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} f(x, y)dy = \int_0^z \left(3e^{-3x} \int_0^{z-x} 3e^{-3y}dy\right) dx =$$

$$= \int_0^z 3e^{-3x}[1 - e^{-3(z-x)}]dx = \int_0^z 3e^{-3x}dx - \int_0^z 3e^{-3z}dx = 1 - e^{-3z} - 3ze^{-3z}\,;$$

quindi

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = 9ze^{-3z}\,,\quad S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = (1 + 3z)e^{-3z}\,,\quad h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{9z}{1 + 3z}\,.$$

7. Nelle estrazioni, con o senza restituzione, da un'urna di composizione nota o incognita si dimostra che gli eventi E_i sono scambiabili, con

$$P(E_i) = P(E_1) = \sum_r P(E_1|H_r)P(H_r)\,,\quad P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = \sum_r P(E_1E_2|H_r)P(H_r)\,,\quad \ldots\,,$$

dove H_r rappresenta l'ipotesi che nel lotto ci siano r pezzi difettosi. Pertanto gli eventi E_1, E_2, E_3 sono scambiabili. Inoltre, essendo $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$, segue

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10}\,,$$

$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{10}\,.$$

Allora: $p = P(E_2|E_1E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_3)} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{7}{8}$.