Probabilità e Statistica (29/01/2011)

(Ing. Civile - Trasporti, Roma; esame da 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Dati due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{3}$, sia $Z = X + Y$. Calcolare la covarianza di X, Z e la probabilità condizionata $p = P(X > 1 \mid Z \leq 3)$.

   $Cov(X, Z) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $p =$

2. Per andare in una località Tizio deve prendere due autobus, impiegando un tempo aleatorio (in ore) X sul primo e un tempo aleatorio Y sul secondo. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = kxy$, per $(x, y) \in Q = [1, 2] \times [1, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k, la previsione μ e lo scarto standard σ del tempo aleatorio totale $Z = X + Y$.

   $k =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mu =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare $Cov(2X + Y, X - 2Y)$ e la probabilità condizionata $p = P(Y \geq X \mid X + Y \leq 3)$.

   $Cov(2X + Y, X - 2Y) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $p =$

4. Da un lotto contenente 4 pezzi (2 difettosi e 2 buoni) si eliminano a caso due pezzi; successivamente viene prelevato a caso un terzo pezzo. Definiti gli eventi $A =$*"il primo pezzo eliminato dal lotto è buono"*, $B =$ *"il secondo pezzo eliminato dal lotto è buono"*, $C =$ *"il terzo pezzo prelevato dal lotto è buono"*, calcolare la probabilità p dell'evento $A^c B^c C$ e la probabilità condizionata $\alpha = P(A \vee B \mid C)$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |A| + |B|$.

   $\varphi_X(t) =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-3y}$, per $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e, per ogni $z > 0$, la funzione di rischio $h(z)$ del numero aleatorio $Z = 2X - Y$.

   $k =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $h(z) =$

7. La distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio Θ è di tipo Gamma, con parametri $c_0 = 3, \lambda_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_6)$, subordinatamente a ogni fissato valore θ, hanno una distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = \theta$. Calcolare la previsione di Θ condizionata ad un campione osservato $x = (x_1, \ldots, x_6)$, con $x_1 + \cdots + x_6 = \tau$.

   $\mathbb{P}(\Theta \mid x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 29/01/2011.

1. Si ha $Cov(X,Z) = Cov(X,X+Y) = Cov(X,X) + Cov(X,Y) = Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = 6$. Inoltre

   $$(X+Y \leq 3) \Longleftrightarrow (X,Y) \in \{(1,1),(1,2),(2,1)\}\,, \quad (X>1, X+Y \leq 3) \Longleftrightarrow (X,Y) = (2,1)\,;$$

   pertanto, $P(X=x, Y=y) = p(x,y)$ e tenendo conto che

   $$P(X=x,Y=y) = p(x,y) = P(X=x)P(Y=y) = pq^{x-1}pq^{y-1} = p^2q^{x+y-2} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+y-2}\,,$$

   si ha

   $$p = P(X>1 \,|\, Z \leq 3) = \frac{P(X>1, Z\leq 3)}{P(Z\leq 3)} = \frac{p(2,1)}{p(1,1)+p(1,2)+p(2,1)} = \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{2}{7}\,.$$

2. Dev'essere $\int\int_Q f(x,y)dxdy = 1$, ovvero $k\int_1^2\int_1^2 xydxdy = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9}{4}\cdot k = 1$, da cui segue: $k = \frac{4}{9}$. Inoltre

   $$f_1(x) = \int_1^2 \frac{4}{9}xydy = \frac{2}{3}\cdot x\,,\ 1 \leq x \leq 2\,;\quad f_2(y) = \int_1^2 \frac{4}{9}xydx = \frac{2}{3}\cdot y\,,\ 1\leq y\leq 2\,;$$

   con $f_1(x) = 0$ per $x \notin [1,2]$, $f_2(y) = 0$ per $y \notin [1,2]$. Allora

   $$\mathbb{P}(X) = \int_1^2 xf_1(x)dx = \int_1^2 \frac{2}{3}\cdot x^2dx = \frac{14}{9} = \mathbb{P}(Y)\,,$$

   $$\mathbb{P}(X^2) = \int_1^2 x^2f_1(x)dx = \int_1^2 \frac{2}{3}\cdot x^3dx = \frac{5}{2} = \mathbb{P}(Y^2)\,,$$

   da cui segue: $Var(X) = Var(Y) = \frac{5}{2} - (\frac{14}{9})^2 = \frac{13}{162}$. Pertanto: $\mu = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = \frac{28}{9}$; infine, osservando che X e Y sono stocasticamente indipendenti, si ha: $Var(Z) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{13}{81}$, da cui segue: $\sigma = \frac{\sqrt{13}}{9}$.

3. Essendo $Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = 0$, si ha

   $$Cov(2X+Y, X-2Y) = \cdots = 2Cov(X,X) - 2Cov(Y,Y) = 2Var(X) - 2Var(Y) = 0\,.$$

   Inoltre, indicando con T il triangolo di vertici $(1,1),(\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(1,2)$ e con D il triangolo di vertici $(1,1),(2,1),(1,2)$, si ha

   $$(Y\geq X,\, X+Y\leq 3) = [(X,Y)\in T]\,,\quad (X+Y\leq 3) = [(X,Y)\in D]\,;$$

   da cui segue

   $$P(Y\geq X,\, X+Y\leq 3) = \int\int_T f(x,y)dxdy = \int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_x^{3-x} \frac{4}{9}xydy = \cdots = \frac{7}{36}\,,$$

   $$P(X+Y\leq 3) = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_1^2 dx\int_1^{3-x}\frac{4}{9}xydy = \cdots = \frac{7}{18}\,;$$

   pertanto: $p = \frac{P(Y\geq X, X+Y\leq 3)}{P(X+Y\leq 3)} = \frac{1}{2}$.

4. Si ha

$$PA) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}\,, \quad P(A^cB^cC) = P(A^c)P(B^c|A^c)P(C|A^cB^c) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{6}\,;$$

inoltre

$$P(A \vee B\,|\,C) = 1 - P(A^cB^c\,|\,C) = 1 - \frac{P(A^cB^cC)}{P(C)} = 1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,.$$

5. Si ha $X \sim H(4, 2, \frac{1}{2})$, con

$$X \in \{0,1,2\}\,, \quad P(X=0) = P(A^cB^c) = \frac{1}{6} = P(AB) = P(X=2)\,, \quad P(X=1) = \frac{4}{6}\,;$$

pertanto, posto $P(X = h) = p_h$, $h = 0, 1, 2$, si ha

$$\varphi_X(t) = \sum_{h=0}^{2} p_h e^{ith} = \frac{1}{6}(1 + 4e^{it} + e^{2it})\,.$$

6. Si ha

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{2x} f(x,y)dxdy = \frac{k}{3}\int_0^{+\infty}(e^{-x}\int_0^{2x} 3e^{-3y}dy)dx = \frac{k}{3}\int_0^{+\infty} e^{-x}(1-e^{-6x})dx = \cdots = \frac{2}{7}\,k = 1\,;$$

pertanto $k = \frac{7}{2}$. Inoltre, si ha $Z \in [0, +\infty)$ e, per ogni fissato $z > 0$, risulta

$$S(z) = P(Z > z) = P(Y < 2X - z) = \int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} dx \int_0^{2x-z} \frac{7}{2} e^{-x-3y} dy = \frac{7}{6}\int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} e^{-x}dx \int_0^{2x-z} 3e^{-3y}dy =$$

$$= \frac{7}{6}\int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} e^{-x}(1-e^{-6x+3z})dx = \frac{7}{6}\int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} e^{-x}dx - \frac{1}{6}\,e^{3z}\int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} 7e^{-7x}dx = \cdots = \frac{7}{6}e^{-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6}e^{-\frac{z}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\,z}\,.$$

Pertanto, per ogni $z > 0$, si ha: $h(z) = \frac{-S'(z)}{S(z)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}}{e^{-\frac{1}{2}z}} = \frac{1}{2}$ (*ovvero, Z ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$*).

7. Ricordando che $G_{c,\lambda}(x) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$, con $G_{c,\lambda}(x) = 0$ altrove, si ha

$$X_i|\theta \sim f(x_i|\theta) = G_{2,\theta}(x_i) = \frac{\theta^2}{\Gamma(2)} x_i^{2-1} e^{-\theta x_i} = \theta^2 x_i e^{-\theta x_i},\ i = 1, \ldots, 6\,,$$

da cui segue

$$\alpha(x|\theta) = f(x_1|\theta)\cdots f(x_6|\theta) = \theta^{12} x_1 \cdots x_6 e^{-\theta \sum_i x_i} = k\theta^{12} e^{-\tau\theta}\,, \quad k = x_1 \cdots x_6\,;$$

inoltre $\beta(\theta) = G_{c_0,\lambda_0}(\theta) = G_{3,1}(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 e^{-\theta}$ per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Allora, la distribuzione finale è ancora di tipo Gamma e risulta

$$\beta(\theta|x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x|\theta) = k_1(x)\theta^2 e^{-\theta}\theta^{12} e^{-\tau\theta} = k_1(x)\theta^{14} e^{-(\tau+1)\theta} = G_{c_6,\lambda_6}(\theta) = G_{15,\tau+1}(\theta)\,,$$

con $k_1(x) = \frac{\lambda_6^{c_6}}{\Gamma(c_6)} = \frac{(\tau+1)^{15}}{14!}$; pertanto: $\mathbb{P}(\Theta\,|\,x) = \frac{c_6}{\lambda_6} = \frac{15}{\tau+1}$.