Probabilità e Statistica (9/07/2011)

(Ing. Civile - Trasporti - Amb. Terr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Dati due numeri aleatori $X = |E_1| + |E_2|$ e $Y = |E_2| + |E_3|$, con E_1, E_2, E_3 eventi indipendenti e di probabilità $\frac{1}{2}$, calcolare la covarianza di X, Y e la probabilità condizionata $p = P(X \geq 1 \,|\, Y \leq 1)$.

   $Cov(X, Y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

2. Uno studente deve fare due relazioni, impiegando un tempo aleatorio (in ore) X per la prima relazione e un tempo aleatorio Y per la seconda. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{3}(x+y)$, per $(x, y) \in Q = [1, 2] \times [1, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la previsione μ del tempo aleatorio totale $X + Y$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq \frac{3}{2})|(X + Y \leq 3)$.

   $\mu =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

3. Siano dati tre lotti, L_1, L_2, L_3, contenenti ciascuno 5 pezzi buoni e 1 difettoso. Tizio divide a caso L_1 in due gruppi, I_1 contenente 4 pezzi e I_2 contenente 2 pezzi; quindi estrae a caso un pezzo da I_1. Caio divide a caso L_2 in due gruppi, J_1 contenente 4 pezzi e J_2 contenente 2 pezzi; quindi estrae a caso un pezzo da J_2. Sempronio divide a caso L_3 in due gruppi, G_1 contenente 4 pezzi e G_2 contenente 2 pezzi; quindi estrae a caso un pezzo da G_1 (evento A), oppure da G_2 (evento A^c), con $P(A) = p$. Definiti gli eventi $E_1 =$ "il pezzo scelto a caso da Tizio è difettoso", $E_2 =$ "il pezzo scelto a caso da Caio è difettoso", $E_3 =$ "il pezzo scelto a caso da Sempronio è difettoso", calcolare le probabilità di E_1, E_2, E_3.

   $P(E_1) =$ $\qquad\qquad$ $P(E_2) =$ $\qquad\qquad$ $P(E_3) =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}$. Calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(2 \leq X \leq 4, -4 \leq Y \leq -2 \,|\, X \geq 0, Y \leq 0)$.

   $p =$

5. Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti, sono $\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^4$, $\varphi_Y(t) = (pe^{it} + q)^n$, con $p \in (0, 1), q = 1 - p$. Posto $Z = X + Y$, calcolare i parametri n e p sapendo che $\mathbb{P}(Z) = 4, Var(Z) = 2$.

   $n =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-y}$, per $x \geq 0$, $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e, per ogni $y > 0$, la funzione di rischio $h_2(y)$ del numero aleatorio Y.

   $k =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

7. Siano date 3 urne U_1, U_2, U_3, con U_1 contenente 3 palline bianche e 1 nera, U_2 contenente 2 palline bianche e 2 nere, U_3 contenente 1 pallina bianca e 3 palline nere. Scelta a caso una delle 3 urne, da essa si effettuano estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3, 4$, ed $H_r =$ *"le estrazioni sono effettuate dall'urna U_r"*, $r = 1, 2, 3$, calcolare $P(E_1|E_4)$ e l'indice r che massimizza $P(H_r|E_1E_4^c)$.

   $P(E_1|E_4) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $r =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 9/07/2011.

1. Si ha $Cov(E_i, E_j) = 0, i \neq j$, $Cov(E_i, E_i) = Var(E_i) = \frac{1}{4}$; quindi
$$Cov(X,Y) = Cov(|E_1| + |E_2|, |E_2| + |E_3|) =$$
$$= Cov(|E_1|, |E_2|) + Cov(|E_1|, |E_3|) + Cov(|E_2|, |E_2|) + Cov(|E_1|, |E_3|) = \frac{1}{4}\,.$$
Inoltre $X \in \{0,1,2\}, Y \in \{0,1,2\}$, con $(X \geq 1) = E_1E_2^c \vee E_1^cE_2 \vee E_1E_2$, $(Y \leq 1) = = E_2E_3^c \vee E_2^cE_3 \vee E_2^cE_3^c$, $(X \geq 1, Y \leq 1) = E_1E_2^cE_3 \vee E_1E_2^cE_3^c \vee E_1^cE_2E_3^c \vee E_1E_2E_3^c$, e con
$$P(E_2E_3^c) = P(E_2^cE_3) = P(E_2^cE_3^c) = \frac{1}{4}\,,\ P(E_1E_2^cE_3) = P(E_1E_2^cE_3^c) = P(E_1^cE_2E_3^c) = P(E_1E_2E_3^c) = \frac{1}{8}\,;$$
pertanto: $p = P(X \geq 1\,|\,Y \leq 1) = \frac{P(X\geq 1, Y \leq 1)}{P(Y\leq 1)} = \frac{\frac{4}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$.

2. Si ha
$$f_1(x) = \int_1^2 \frac{1}{3}(x+y)dy = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\,,\ 1 \leq x \leq 2\,;\quad f_2(y) = \int_1^2 \frac{1}{3}(x+y)dx = \frac{y}{3} + \frac{1}{2}\,,\ 1 \leq y \leq 2\,;$$
con $f_1(x) = 0$ per $x \notin [1,2]$, $f_2(y) = 0$ per $y \notin [1,2]$. Quindi $f_1 = f_2$, con
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \int_1^2 x f_1(x)dx = \int_1^2 x\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{55}{36}\,.$$
Inoltre
$$p = P[(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq \frac{3}{2})|(X+Y \leq 3)] = \frac{P[(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq \frac{3}{2}) \wedge (X+Y \leq 3)]}{P(X+Y \leq 3)} = \frac{P(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq \frac{3}{2})}{P(X+Y \leq 3)}\,,$$
con $P(X+Y \leq 3) = \frac{1}{3}\int_1^2 dx \int_1^{3-x}(x+y)dy = \frac{4}{9}$, $P(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq \frac{3}{2}) = \frac{1}{3}\int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_1^{\frac{3}{2}}(x+y)dy = \frac{5}{24}$; pertanto: $p = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{4}{9}} = \frac{15}{32}$.

3. Definiti gli eventi $H =$ "I_1 contiene il pezzo difettoso", $K =$ "J_1 contiene il pezzo difettoso", $F =$ "G_1 contiene il pezzo difettoso", si ha $E_1H^c = E_2K = E_3FA^c = E_3F^cA = \emptyset$. Allora
$$P(E_1|H^c) = P(E_2|K) = P(E_3|FA^c) = P(E_3|F^cA) = 0\,;$$
inoltre A ed F sono stocasticamente indipendenti. Quindi
$$P(E_1) = P(E_1|H)P(H) + P(E_1|H^c)P(H^c) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\binom{5}{3}\binom{1}{1}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{6}\,;$$
$P(E_2) = P(E_2|K)P(K) + P(E_2|K^c)P(K^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{5}{4}\binom{1}{0}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{6}$;
$$P(E_3) = P(E_3FA \vee E_3F^cA^c) = P(A)P(F)P(E_3|FA) + P(A^c)P(F^c)P(E_3|F^cA^c) =$$
$$= p\cdot\frac{\binom{5}{3}\binom{1}{1}}{\binom{6}{4}}\cdot\frac{1}{4} + (1-p)\cdot\frac{\binom{5}{4}\binom{1}{0}}{\binom{6}{4}}\cdot\frac{1}{2} = p\cdot\frac{1}{6} + (1-p)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\,.$$
Pertanto: $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{6}$.
(*Nota: la probabilità è la stessa se si estrae direttamente dai lotti senza dividerli in gruppi*)

4. Si ha: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}}$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{8}}$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Pertanto $X \sim N_{0,2}(x), Y \sim N_{0,2}(y)$ e, osservando che $\Phi_{0,\sigma}(0) = \frac{1}{2}, \forall \sigma > 0$, si ha

$$p = P(2 \leq X \leq 4, -4 \leq Y \leq -2 \,|\, X \geq 0, Y \leq 0) = \frac{P(2 \leq X \leq 4, -4 \leq Y \leq -2,\ X \geq 0, Y \leq 0)}{P(X \geq 0, Y \leq 0)} =$$

$$= \frac{P(2 \leq X \leq 4, -4 \leq Y \leq -2)}{P(X \geq 0, Y \leq 0)} = \frac{P(2 \leq X \leq 4)P(-4 \leq Y \leq -2)}{P(X \geq 0)P(Y \leq 0)} =$$

$$= \frac{[\Phi_{0,2}(4) - \Phi_{0,2}(2)][\Phi_{0,2}(-2) - \Phi_{0,2}(-4)]}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{[\Phi(2) - \Phi(1)][\Phi(-1) - \Phi(-2)]}{\frac{1}{4}} =$$

$$= 4[\Phi(2) - \Phi(1)]^2 \simeq 4(0.9772 - 0.8413)^2 \simeq 0.0739\,.$$

5. Si ha: $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (pe^{it} + q)^4 (pe^{it} + q)^n = (pe^{it} + q)^{n+4}$; pertanto, Z ha una distribuzione binomiale di parametri $n + 4, p$, con $\mathbb{P}(Z) = (n + 4)p = 4$, $Var(Z) = (n+4)pq = 2$; allora $q = \frac{1}{2} = p$; quindi: $n+4 = 8$, da cui segue $n = 4$; ovvero $Z \sim B(8, \frac{1}{2})$.

6. Si ha

$$\int_0^{+\infty} \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dxdy = k \int_0^{+\infty} (e^{-x} \int_{\frac{x}{2}}^{2x} e^{-y}dy)dx = k \int_0^{+\infty} e^{-x}(-e^{-2x} + e^{-\frac{x}{2}})dx = \cdots = \frac{k}{3} = 1\,;$$

pertanto $k = 3$. Inoltre, per ogni fissato $y > 0$, risulta

$$f_2(y) = \int_{\frac{y}{2}}^{2y} 3e^{-x-y}dx = \cdots = 3e^{-y}(e^{-\frac{y}{2}} - e^{-2y}) = 2 \cdot \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}y} - 3e^{-3y}\,;$$

$$S_2(y) = P(Y > y) = \int_y^{+\infty} f_2(t)dt = 2\int_y^{+\infty} \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}dt - \int_y^{+\infty} 3e^{-3t}dt = 2e^{-\frac{3}{2}y} - e^{-3y}\,;$$

pertanto: $h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}y} - 3e^{-3y}}{2e^{-\frac{3}{2}y} - e^{-3y}} = \frac{3e^{\frac{3}{2}y} - 3}{2e^{\frac{3}{2}y} - 1}$.

7. Gli eventi E_1, E_2, E_3, E_4 sono scambiabili; pertanto $P(E_i) = P(E_1)$, per ogni i, e $P(E_iE_j) = P(E_1E_2), P(E_iE_j^c) = P(E_1E_2^c)$, per ogni $i \neq j$, con $P(H_r) = \frac{1}{3}$; inoltre

$$P(E_1) = \sum_r P(H_r)P(E_1|H_r) = \frac{1}{3}(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(E_1E_2) = \sum_r P(H_r)P(E_1E_2|H_r) = \sum_r P(H_r)P(E_1|H_r)P(E_2|E_1H_r) = \frac{1}{3}(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + 0) = \frac{2}{9}\,.$$

Allora: $P(E_1|E_4) = \frac{P(E_1E_4)}{P(E_4)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}$. Inoltre

$$P(H_1|E_1E_4^c) = \frac{P(H_1)P(E_1E_4^c|H_1)}{\sum_r P(H_r)P(E_1E_4^c|H_r)} = \frac{P(E_1E_4^c|H_1)}{\sum_r P(E_1E_4^c|H_r)} = \frac{P(E_1E_2^c|H_1)}{\sum_r P(E_1E_2^c|H_r)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1} = \frac{3}{10}\,; \quad P(H_3|E_1E_4^c) = \frac{P(E_1E_2^c|H_3)}{\sum_r P(E_1E_2^c|H_r)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1} = \frac{3}{10}\,;$$

$P(H_2|E_1E_4^c) = 1 - P(H_1|E_1E_4^c) - P(H_3|E_1E_4^c) = \frac{4}{10}$; pertanto: $r = 2$.