Probabilità e Statistica (18/11/2011)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Sia R il rettangolo di vertici i punti $(0,0),(3,0),(3,2),(0,2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = kxy$, per $(x,y) \in R$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e il valore y_0 tale che $P(Y > y_0) = 2P(Y \leq y_0)$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $y_0 =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la varianza del numero aleatorio $\frac{X+Y}{2}$. Inoltre, posto $U = X + Y, V = X - Y$, calcolare $Cov(U, V)$.

   $Var(\frac{X+Y}{2}) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(U,V) =$

3. Con riferimento all'esercizio 1, calcolare la funzione di ripartizione di X e la probabilità α dell'evento condizionato $(X \geq 1 \,|\, X \leq 2)$.

   $F_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

4. Le lunghezze aleatorie (in cm) X e Y di 2 barre hanno distribuzione normale con parametri $m_1 = m_2 = 20$, $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 4$. Le due barre vengono saldate formando una barra di lunghezza aleatoria $Z = X + Y$. Assumendo X e Y stocasticamente indipendenti, calcolare: (i) $p = P(Z \geq 45 \,|\, 30 \leq Z \leq 50)$; (ii) il coefficiente di correlazione ρ tra X e Z (*osserviamo che Z ha una distribuzione normale con opportuni parametri m_Z, σ_Z*).

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\rho =$

5. Siano dati 3 lotti L_0, L_1, L_2, con L_0 contenente 2 pezzi buoni, L_1 contenente 1 pezzo difettoso e 2 buoni, L_2 contenente 2 pezzi difettosi e 2 buoni. Scelto a caso uno dei 3 lotti, da esso si effettuano estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*, $i = 1, 2, ...$, ed H_r = *"le estrazioni sono effettuate dal lotto L_r"*, $r = 0, 1, 2$, calcolare: (i) $P(E_1|E_3)$; (ii) $P(H_0|E_1E_2E_3)$.

   $P(E_1|E_3) =$ $\qquad\qquad$ $P(H_0|E_1E_2E_3) =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

   $\varphi(t) =$

7. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y) \in [0, +\infty) \times [2, +\infty)$ è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)} & \text{per } x \geq 0\,,\ y \geq 2\,; \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Calcolare: (i) la costante k; (ii) la funzione di sopravvivenza $S_2(y)$ di Y, per $y \geq 2$; (iii) la funzione di rischio $h_2(y)$ di Y, per $y \geq 2$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $S_2(y) =$ $\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 18/11/2011.

1. Si ha
$$\int\int_R f(x,y)dxdy = k\int_0^3 xdx\int_0^2 ydy = k\int_0^3 2xdx = 9k = 1\,,$$
quindi: $k = \frac{1}{9}$. Inoltre, essendo $P(Y > y_0) + P(Y \le y_0) = 3P(Y \le y_0) = 1$, segue
$$P(Y \le y_0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{9}\int_0^3 xdx\int_0^{y_0} ydy = \frac{y_0^2}{36}\int_0^3 2xdx = \frac{y_0^2}{4}\,;$$
ovvero: $y_0^2 = \frac{4}{3}$; pertanto: $y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. Si ha
$$f_1(x) = \frac{1}{9}\int_0^2 xydy = \cdots = \frac{2}{9}x\,,\ 0 \le x \le 3\,,\ \ f_2(y) = \frac{1}{9}\int_0^3 xydx = \cdots = \frac{y}{2}\,,\ 0 \le y \le 2\,,$$
con $f_1(x) = 0$ per $x \notin [0,3]$, $f_2(y) = 0$ per $y \notin [0,2]$, e con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Allora
$$\mathbb{P}(X) = \int_0^3 \frac{2}{9}x^2dx = \cdots = 2\,,\ \ \mathbb{P}(X^2) = \int_0^3 \frac{2}{9}x^3dx = \cdots = \frac{9}{2}\,,$$
$$\mathbb{P}(Y) = \int_0^2 \frac{y^2}{2}dy = \cdots = \frac{4}{3}\,,\ \ \mathbb{P}(Y^2) = \int_0^2 \frac{y^3}{2}dy = \cdots = 2\,,$$
$$Var(X) = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = \frac{1}{2}\,,\ Var(Y) = \mathbb{P}(Y^2) - [\mathbb{P}(Y)]^2 = \frac{2}{9}\,,\ Cov(X,Y) = 0\,.$$
Pertanto
$$Var(\frac{X+Y}{2}) = \frac{Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)}{4} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{9}}{4} = \frac{13}{72}\,.$$
Infine
$$Cov(U,V) = Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) =$$
$$= Var(X) - Var(Y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}\,.$$

3. Ricordando che $f_1(x) = \frac{2}{9}x$,per $x \in [0,3]$, con $f_1(x) = 0$ altrove, segue: $F_1(x) = 0$ per $x \le 0$; $F_1(x) = 1$ per $x \ge 3$; inoltre, per $x \in (0,3)$, si ha: $F_1(x) = \int_0^x \frac{2}{9}t\,dt = \frac{x^2}{9}$. Infine
$$\alpha = P(X \ge 1\,|\,X \le 2) = \frac{P(1 \le X \le 2)}{P(X \le 2)} = \frac{F_1(2) - F_1(1)}{F_1(2)} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4}\,.$$

4. Si ha: $m_Z = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 40\,,\quad \sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 25$; pertanto: $Z \sim N_{40,5}$. Allora, ricordando che $\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$, segue
$$p = P(Z \ge 45\,|\,30 \le Z \le 50) = \frac{P(45 \le Z \le 50)}{P(30 \le Z \le 50)} = \frac{\Phi_{40,5}(50) - \Phi_{40,5(45)}}{\Phi_{40,5}(50) - \Phi_{40,5}(30)} =$$

$$= \frac{\Phi(2)-\Phi(1)}{\Phi(2)-\Phi(-2)} = \frac{\Phi(2)-\Phi(1)}{2\Phi(2)-1} \simeq \frac{0.9772-0.8413}{2\times 0.9772-1} = \frac{0.1359}{0.9544} \simeq 0.1424\,.$$

Inoltre

$$Cov(X,Z) = Cov(X,X+Y) = Cov(X,X) + Cov(X,Y) = Var(X) = 9\,;$$

pertanto: $\rho = \frac{Cov(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = \frac{9}{3\times 5} = \frac{3}{5}$.

5. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono scambiabili; pertanto $P(E_i) = P(E_1)$, $\forall i$, $P(E_iE_j) = P(E_1E_2)$, $\forall i \neq j$, con $P(H_r) = \frac{1}{3}$ e con

$$P(E_1) = \sum_r P(H_r)P(E_1|H_r) = \frac{1}{3}(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}) = \frac{13}{18}\,,$$

$$P(E_1E_2) = \sum_r P(H_r)P(E_1E_2|H_r) = \sum_r P(H_r)P(E_1|H_r)P(E_2|H_r) = \frac{1}{3}(1+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}) = \frac{61}{108}\,.$$

Allora

$$P(E_1|E_3) = \frac{P(E_1E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{61}{108}}{\frac{13}{18}} = \frac{61}{78}\,;$$

$$P(H_0|E_1E_2E_3) = \frac{P(H_0)P(E_1E_2E_3|H_0)}{\sum_r P(H_r)P(E_1E_2E_3|H_r)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{216}{307}\,.$$

6. Si ha $X \in \{0,1,2,3\}$, con

$$P(X=0) = P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \sum_r P(H_r)P(E_1^cE_2^cE_3^c|H_r) = \frac{1}{3}(0+\frac{1}{27}+\frac{1}{8}) = \frac{35}{648}\,,$$

$$P(X=1) = P(E_1E_2^cE_3^c) + P(E_1^cE_2E_3^c) + P(E_1^cE_2^cE_3) = 3P(E_1E_2^cE_3^c) =$$
$$= 3\sum_r P(H_r)P(E_1E_2^cE_3^c|H_r) = 3\cdot\frac{1}{3}(0+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{8}) = \frac{43}{216}\,,$$

$$P(X=2) = P(E_1E_2E_3^c) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3) = 3P(E_1E_2E_3^c) =$$
$$= 3\sum_r P(H_r)P(E_1E_2E_3^c|H_r) = 3\cdot\frac{1}{3}(0+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}) = \frac{59}{216}\,,$$

$$P(X=3) = P(E_1E_2E_3) = \sum_r P(H_r)P(E_1E_2E_3|H_r) = \frac{1}{3}(1+\frac{8}{27}+\frac{1}{8}) = \frac{307}{648}\,,$$

Allora

$$\varphi(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{h=0}^{3} p_h e^{ith} = \frac{35}{648} + \frac{43}{216}\,e^{it} + \frac{59}{216}\,e^{2it} + \frac{307}{648}\,e^{3it} = \frac{35+129e^{it}+59e^{2it}+307e^{3it}}{648}\,.$$

7. Si ha

$$\int_0^{+\infty}\int_2^{+\infty} f(x,y)dxdy = k\int_0^{+\infty} e^{-x}dx \int_2^{+\infty} e^{-y}dy = ke^{-2}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = ke^{-2} = 1\,,$$

da cui segue: $k = e^2$. Inoltre, per ogni $y \geq 2$, si ha

$$f_2(y) = e^2\int_0^{+\infty} e^{-x-y}dx = e^2e^{-y}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = e^2e^{-y} = e^{-(y-2)}\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto, per ogni $y \geq 2$,

$$S_2(y) = \int_y^{+\infty} e^2e^{-t}dt = e^2e^{-y} = e^{-(y-2)} = f_2(y)\,; \quad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = 1\,.$$